# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENKILENCZEDIK ÉVFOLYAM

I–II. FÜZET 1910 JANUÁRIUS–FEBRUÁRIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1910.

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24–30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A tizenkilenczedik társulati év 1910 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János-utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6–6 korona.

*Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két–két koronával váltjuk be.*

**Rendes ülések.** A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2–3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

*Igen tisztelt munkatársainkat* értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

---

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

TIZENKILENCZEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1910

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

# MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

## TIZENKILENCZEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

### Első—Második füzet.



### Harmadik füzet.



### Negyedik füzet.



### Ötödik füzet.



### Hatodik füzet.



*

## Hetedik füzet.



## Nyolczadik füzet.

# NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

## Önálló és ismertető czikkek.

## Irodalom.



## Társulati ügyek.

# ÖSSZEGEZHETŐ TRIGONOMETRIKUS SOROK ÉS ÖSSZEGEZHETŐ HATVÁNYSOROK.[1]

## Bevezetés.

Du Bois-Reymond vizsgálatai óta tudjuk, hogy folytonos függvény Fourier-sorának széttartási helyei mindenütt sűrű halmazt alkothatnak. Az összetartás tehát még a folytonos függvények Fourier-sorának sem sajátja.

Az újabb függvénytani irány nem merül ki konvergencziakritériumok keresésében, hanem a függvény és Fourier-sora között fennálló egyéb kapcsolatok után is kutat. Elsőül Fejér[2] alkalmazta tudatosan ezt a nagy horderejű szempontot e sorok elméletében. Ő ismerte fel, hogy a Cesaro[3] és Frobenius[4] által más problémakörökben alkalmazott szummáló eljárás, (mely a részletösszegek határértéke helyett ezek számtani közepeinek a határértékét vizsgálja), mily nagy fontosságú a Fourier-sorra nézve.

E szummáló eljárással összegezhető széttartó sorok mindenesetre a legegyszerűbben kezelhető és így legjobban használható széttartó sorok közé tartoznak. Az ilyen sort röviden *szummábilis*nek, a számtani közepek határértékét pedig a sor *szummá*jának mondjuk.

---

[1] E dolgozatban közölt eredmények egy része már megjelent a *Comptes Rendus*-ben. (7. octobre 1907.)

[2] Fejér: Vizsgálatok a Fourier-féle sorok köréből. Doktori értekezés. Math. és Phys. Lapok 1902.

— Untersuchungen über Fourier'sche Reihen. Math. Annalen 58. k.

[3] Cesaro: Sur la multiplication des séries. Bulletin des Sciences Math. 14. k. (1890).

[4] Frobenius: Über die Leibnitz'sche Reihe. Crelle's Journal, 89. k.

Fejér főeredménye a következő:

*Minden véges és integrálható $f(x)$ függvény* Fourier-*sora a függvény folytonossági és elsőfajú szakadó helyein szummábilis, értéke a folytonossági helyeken $f(x)$, az elsőfajú szakadó helyeken pedig* $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

E mélyreható tételt azután maga Fejér és Lebesgue[1] különböző szempontokból jelentékenyen általánosították.

A Fejér-féle összegezésnek fontos sajátsága még az is, hogy a közepek a függvény folytonossági intervallumaiban egyenletesen konvergálnak a függvényértékek felé, míg, mint ezt Lebesgue[2] újabban kimutatta, mindenütt folytonos függvény Fourier-sora mindenütt összetartó lehet, a nélkül, hogy egyenletesen összetartó volna.

A Fourier-sorok tudvalevőleg olyan speciális trigonometrikus sorok, melyeknek együtthatóit a jól ismert Fourier-féle integrálképletek szolgáltatják. Ezeknek a soroknak a vizsgálatánál tehát mindig egy előre megadott függvényből indulunk ki. Az *a priori* megadott, összetartó trigonometrikus sorok elméletében legfontosabb tételeket Riemann,[3] Cantor[4] és Du Bois-Reymond[5] adták. Eredményeik tárgyalásunk során mind szóba fognak kerülni. Most ezek közül csak egyik legjellemzőbbet, a Cantor-féle tételt ragadom ki. Ez így szól:

*Ha valamely trigonometrikus sor a* $(0, 2\pi)$ *számköz helyein (esetleg egy reduktibilis ponthalmaz[6] kivételével) összetartó és összege eltűnik, akkor összes együtthatói is eltűnnek.*

---

[1] Lebesgue: Sur la convergence des séries de Fourier. Math. Ann. 61. k.

[2] Lebesgue: Comptes Rendus, 17. novembre 1905.

[3] Riemann: Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Gesammelte Werke. (1876) 213. o.

[4] Cantor: Über die Ansdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. 5. k.

[5] Du Bois-Reymond: Beweis dass die Coefficienten etc. Abh. der bayer. Akad. 12. k. (1875).

[6] Reduktibilisnek az olyan ponthalmazt mondjuk, melynek valamelyik derivált halmaza eltűnik.

Cantor bebizonyításában Riemann[7] és Schwarz tételeire támaszkodik.

Láttuk előbb a Fourier-sorok példáján, hogy a trigonometrikus sorok természetének a szummáló eljárás sokkal jobban megfelel, mint a közönséges összeg képezése. Magától kinálkozik tehát az a kérdés, hogy vajjon például Cantor tétele esetleg széttartó, de szummábilis trigonometrikus sorokra általánosítható-e. Doktori disszertácziójában Fejér e kérdésről még szkeptikusan nyilatkozik, mert hiszen az

$$\tfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx + \cdots$$

széttartó sor szummája a 0 és $2\pi$ helyek kivételével a $(0, 2\pi)$ számköz minden helyén *zérus* és e sor együtthatói még sem tünnek el valamennyien. A «*Mathematische Annalen*»-ben azonban Fejér már általánosítja a Cantortól felhasznált Riemann-féle tételt és ez által mintegy előkészíti a kérdésre adandó feleletet.

Közös göttingai tartózkodásunk alatt maga Fejér úr volt szíves figyelmemet e tárgyra felhívni, a mit e helyütt is kedves kötelességem neki megköszönni.

E dolgozat két részre oszlik. Első részében többek között a következő tételeket mutatom ki:

*Ha valamely trigonometrikus sor $a_n$, $b_n$ együtthatóiból alakított*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2}$$

*sor összetartó, úgy e trigonometrikus sor szummája a $(0, 2\pi)$ intervallum minden helyén csak akkor tünhetik el, ha a sor összes együtthatói is eltünnek.*

*Ha a trigonometrikus sor együtthatói zérus felé tartanak és a sor legfeljebb egy reduktibilis halmaz kivételével a $(0, 2\pi)$ intervallumban szummábilis és szummája zérus, akkor valamennyi együtthatója is eltünik.*

Tételünk bebizonyítására Schwarz említett tételét kellett megfelelő módon általánosítanunk. Eredményünk így hangzik:

*Minden folytonos függvény, melynek általánosított második differencziálhányadosa is folytonos és általánosított negyedik differencziálhányadosa zérus, harmadrendű polinóm.*[1]

Ez az eredmény, továbbá RIEMANN tételének FEJÉR-féle általánosítása, majd pedig egy függvényegyenlet megoldása közvetlenül első tételünkhöz vezetnek.

A zérus felé konvergáló együtthatójú sorokról szóló állításunk bebizonyítására még egy egyszerű segédtételt kellett levezetnünk.

E vizsgálatok kapcsán azután DU BOIS-REYMOND alapvető tételének analogonját adjuk, a melyet egy magában is érdekes középérték-tétel segítségével bizonyítunk be.

Dolgozatunk második részében az eddigiektől teljesen függetlenül bizonyos hatványsoroknak összetartási körükön való viselkedését vizsgáljuk.

Vizsgálataink módot adnak erősen széttartó szummábilis sorok képzésére, másrészt a többszöri szummáló eljárás alkalmazhatóságára mutatnak rá. Megadunk ugyanis bizonyos hatványsor-osztályokat, melyek a szummáló eljárás $n$-szeres alkalmazásával összegezhetők, míg $n$-nél kisebb szám nem vezet czélra. Ez tudtunkkal eddig még nem történt.

A továbbiakban általánosítjuk eredményeinket arra az esetre, mikor a szummálás rendje nem egész szám. Vizsgálataink ezen a ponton kapcsolatba jönnek HADAMARD néhány eredményével.

## I. CANTOR tétele.

A bevezetésben említettük, hogy CANTOR a tételét RIEMANN és SCHWARZ tételeinek alapján bizonyította be. RIEMANN tétele a következőképen hangzik:

---

[1] Megjegyezzük itt, hogy a másodiknál magasabbrendű általánosított differencziálhányadosokra vonatkozólag eddig csupán triviális eredményeket nyertek. Nagyon közel fekvő eredmények még a HARNACKéi is, melyek egyenletesen konvergáló sorozatok jól ismert tulajdonságainak egyszerű alkalmazásai. (Math. Ann. 23. és 24. k.)

Legyen

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots \tag{1}$$

oly trigonometrikus sor, melynek együtthatói zérus felé tartanak. A tagonkint való kétszeres integrálással nyert

$$F(x)=\frac{a_0}{2}x^2-A_1-\frac{A_2}{4}-\cdots-\frac{A_n}{n^2}-\cdots \tag{2}$$

egyenletesen összetartó sor, melyben

$$A_0=a_0,\quad A_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

természetesen folytonos függvényt ábrázol. *Ha már most az* (1) *alatti sor az $x$ helyen összetartó és összege $f(x)$, akkor a*

$$\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}=$$

$$=\lim_{h=0}\left[A_0+A_1\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2+\cdots+A_n\left(\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}\right)^2+\cdots\right] \tag{3}$$

*határérték létezik és értéke $f(x)$.*[1]

*Azonkívül minden $x$ értékre nézve*

$$\lim_{h=0}\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h}=0. \tag{4}$$

E tételhez csatlakozik azután Schwarz tétele, mely szerint: *Ha az $(a, b)$ számköz minden helyén valamely folytonos $F(x)$ függvény általánosított második deriváltja*

---

[1] A (3) alatti kifejezést $F(x)$ *általánosított második differenciálhányadosának vagy általánosított második deriváltjának* nevezik. A különböző rendű általánosított differencziálhányadosok képezési módja magától világos. Főérdekességük az, hogy egyszeri határátmenettel vannak értelmezve és hogy mindig léteznek, mikor a megfelelő közönséges differencziálhányados létezik és ekkor a két érték meg is egyezik. Dolgozatunkban főleg az általánosított negyedik differencziálhányadosnak jut fontos szerep.

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^2 F(x, h)}{h^2} = \lim_{h=0} \frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2} = 0,$$

*akkor* $F(x)$ *x-nek lineáris függvénye.*

Másrészt Cantor[1] kimutatja, hogy *egy tetszésszerinti kis intervallumban összetartó trigonometrikus sor együtthatói zérushoz közelednek.* Ezeket Riemann tételeivel összevetvén, könynyen nyerjük Cantor tételét.[2]

Tegyük fel ugyanis, hogy az (1) alatti sor véges számú hely kivételével összetartó és összegül zérust ad. A két idézett tétel értelmében világos, hogy a (2) alatti $F(x)$ függvény bármely két szomszédos kivételes hely között lineáris. A függvény azonban mint mondottuk, ezeken a helyeken is folytonos, tehát végeredményben az $F(x)$ függvény folytonos törtvonalat ábrázol, melynek csúcsai az esetleg létező kivételes helyek. Azonban ilyen kivételes $x$ helyre nézve is

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h)-2F(x)+F(x+h)}{h} = 0,$$

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{F(x-h)-F(x)}{-h},$$

tehát az $x$ abszczisszájú helyen találkozó két egyenes egymás meghosszabbítása és így $F(x)$ egyenest ábrázol. Legyen ennek az egyenesnek egyenlete

$$y=cx+c',$$

[1] Cantor: Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. Crelle's Journal. 72. k.

— Über trigonometrische Reihen, Math. Ann. 4. k. Cantor itt azt az általánosabb tételt is kimutatja, hogy, ha

$$\lim_{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$$

egy intervallum minden helyén, akkor egyszersmind

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0 \text{ és } \lim_{n=\infty} b_n = 0.$$

[2] Kronecker szellemesen kimutatja, hogy a tétel bebizonyításában ez az eredmény nélkülözhető. Beweis dass eine für jeden reellen Werth etc. Crelle's Journal. 72. k.

akkor $x$ minden értékére nézve

$$A_0\frac{x^2}{2}-A_1-\cdots-\frac{A_n}{n^2}-\cdots=cx+c',$$

$$A_0\frac{x^2}{2}-cx-c'=A_1+\frac{A_2}{2^2}+\cdots+\frac{A_n}{n^2}+\cdots$$

A baloldali rész csak akkor lehet periodikus, ha

$$A_0=c=0.$$

Tudjuk azonban, hogy a jobboldali sor egyenletesen összetartó és így együtthatóit a FOURIER-féle integrál-képletek adják, vagyis

$$a_n=0,\quad b_n=0.$$

Ha a trigonometrikus sor végtelen sok kivételes helylyel bir és ezek reduktibilis halmazt alkotnak, akkor ugyanez a módszer alkalmazható.

## A CANTOR-féle tétel általánosítása szummábilis sorokra.

Említettük már, hogy vizsgálataink oly, esetleg széttartó

$$c_0+c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$$

sorokkal foglalkoznak, melyekre nézve az $s_n$ részletösszegekből képezett

$$\lim_{n=\infty} S_n=\lim_{n=\infty}\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1}$$

határérték létezik. Megjegyzendő, hogy e határérték mindig létezik, ha a sor összetartó és ekkor megegyezik a sor összegével. A FEJÉR-féle eredmények a FOURIER-sorokra vonatkozólag megmutatták azonban, hogy ez a szummáló eljárás sokkal tágabb körben alkalmazható, mint a közönséges összegképezés. E dolgozat további folyamán részünkről is megadunk olyan trigonometrikus sorokat, melyeknél összetartásról általánosságban szó sem lehet és a melyek a megadott eljárással mindenütt szummábilisek.

Egyelőre ki akarjuk emelni a szummábilis sorok egy fontos tulajdonságát, melyet a továbbiakban folytonosan alkalmazni fogunk.

Ha a $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ határérték létezik, akkor világos, hogy

$$\lim_{n=\infty}(S_n-S_{n-1})=0,$$

hasonlóképen

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{n+1}{n}S_n-S_{n-1}\right)=0,$$

innét

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n}{n}=0 \tag{5}$$

és

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n=\infty}\frac{s_n-s_{n-1}}{n}=0. \tag{6}$$

Ez a két utóbbi feltétel tehát szükséges ahhoz, hogy valamely sor szummábilis legyen.[1]

A bevezetésben megemlítettük azokat a szempontokat, melyek kivánatossá teszik annak megvizsgálását, hogy vajjon a Cantor-féle tétel szummábilis sorokra kiterjeszthető-e. Egyszersmind jeleztük a következő két tételt:

*Ha valamely trigonometrikus sor $a_n$, $b_n$ együtthatóiból alkotott*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n^2} \tag{7}$$

*sor összetartó, úgy e trigonometrikus sor szummája csak akkor tünhetik el a $(0, 2\pi)$ intervallum minden helyén, ha a sor öszszes együtthatói is eltünnek.*

*Ha a sor együtthatói n növekedtével zérus felé tartanak, akkor tételünk kimondásában a kivételes helyek reduktibilis halmazát is megengedhetjük.*

E két tétel az eredeti Cantor-félére új világosságot vet. Ott kivételes helyek létezésénél sem kellett feltenni, hogy az együtthatók végtelen kicsinyek lesznek, mert ez már a sor összetartásából következett.

[1] Fejér l. c.

Megjegyzendő, hogy a (7) feltételnek mindig eleget tesz a sor, ha létezik két oly szám $c$ és $\alpha$ ($\alpha<1$), hogy

$$|a_n| < cn^\alpha \quad \text{és} \quad |b_n| < cn^\alpha.$$

Viszont a 10. oldalon mondottakból következik, hogy, ha sorunk az $x$ helyen szummábilis, akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n} = 0.$$

De a szummábilitást az egész intervallumra nézve feltettük és igy CANTOR egy idézett tételéből következtetjük, hogy mindig

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{b_n}{n} = 0.$$

Látjuk tehát, mely sorok azok, melyekre tételünk nem alkalmazható.

Tételeink bebizonyításában RIEMANN tételének FEJÉR-féle általánosítása szolgál kiinduló pontul:

*Legyen*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

*oly trigonometrikus sor, mely az $x$ helyen a számtani közepek eljárásával összegezhető és az $f(x)$ értéket adja. Tagonkint négyszer integrálván, az egyenletesen összetartó*[1]

$$F(x) = a_0 \frac{x^4}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4}$$

*sort nyerjük, melyre nézve*

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+2h)-4F(x+h)+6F(x)-4F(x-h)+F(x-2h)}{h^4} =$$

$$= \lim_{h=0} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \left( \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}} \right)^4 \right] = f(x).$$

---

[1] Ha csak felteszszük, hogy

$$|a_n| \quad \text{és} \quad |b_n| < kn^{3-\varepsilon}$$
$$\varepsilon > 0.$$

Látni való tehát, hogy csak Schwarz tételét kell megfelelő módon általánositani, hogy a Cantor-féle tétel keresett analogonját kapjuk. Schwarz tételének közvetetlen általánositását a következő tételből fogjuk levezetni:

*Legyen $F(x)$ oly folytonos függvény, melynek általánosított második deriváltja folytonos*[1] *és a melynek a vizsgált intervallum minden helyén van általánosított negyedik deriváltja*

$$\Phi(x) = \lim_{h=0} \frac{\Delta^4 F(x)}{h^4} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{F(x+2h)-4F(x+h)+6F(x)-4F(x-h)+F(x-2h)}{h^4},$$

*akkor a* $\frac{\Delta^4 F(x_0)}{h^4}$ *mennyiség az* $(x_0-2h, x_0+2h)$ *intervallumban felvett* $\Phi$ *értékek alsó és felső határai közé esik*[2] (I).

E középérték-tétel, mely további vizsgálatainkban alapvető szerepet játszik, bizonyos tekintetben a Rolle-tételre emlékeztet. Bizonyításában a következő lemma lesz segítségünkre.

*Valamely feltételünknek eleget tevő függvény általánosított negyedik differencziálhányadosa pozitiv vagy zérus minden olyan helyen, melyen a második differencziálhányadosnak minimuma*[3] *van és negativ vagy zérus minden olyan helyen, mely maximumnak felel meg.*

E tétel plauzibilis, ha a függvénynek létezik a közönséges értelemben vett első négy deriváltja, mert hiszen ekkor a függvény negyedik deriváltja a másodiknak újra második deriváltja. De vizsgálatainkban az általánosított negyedik derivált egyszeri határátmenettel van értelmezve és nincsen közvetetlen kapcso-

---

[1] Könnyű kimutatni, hogy ez akkor egyszersmind közönséges értelemben vett második derivált is.

[2] $h$ természetesen úgy van megválasztva, hogy $x_0-h$ és $x_0+h$ a megadott intervallum belsejében legyenek.

[3] Minthogy feltételünk szerint ez a második derivált folytonos, tehát van maximuma és minimuma.

lat közötte és a második derivált között. Annál érdekesebb tehát a fent jelzett tulajdonság.

Lemmánk bebizonyitására szolgál HÖLDER egy tétele,[1] melylyel (I) alatti tételünk teljesen analóg. E szerint:

*Ha valamely folytonos $F(x)$ függvénynek egy intervallum minden helyén van általánosított második deriváltja, melynek az $(x_0-h, x_0+h)$ intervallumban alsó és felső határa $m$, illetőleg $M$, akkor a*

$$\frac{\Delta^2 F(x_0)}{h^2} = \frac{F(x_0+h)-2F(x_0)+F(x_0-h)}{h^2}$$

*mennyiség az $m$ és $M$ értékek között foglaltatik.*

E tételből lemmánk bebizonyítása közvetetlenül folyik. Tegyük fel ugyanis, hogy például az $x_0$ helyen, melyen a második derivált minimum, az általánosított negyedik derivált negativ lenne. Ez esetben találhatunk olyan pozitiv $h'$ mennyiséget, hogy

$$\frac{F(x_0+2h)-4F(x_0+h)+6F(x_0)-4F(x_0-h)+F(x_0-2h)}{h^4} < 0,$$

ha csak

$$h < h'.$$

Innét kis átalakitással nyerjük:

$$\frac{F(x_0+2h)-2F(x_0)+F(x_0-2h)}{4h^2} < \frac{F(x_0+h)-2F(x_0)+F(x_0-h)}{h^2}.$$

Így az egyenlőtlenségeknek egy sorozatát kaphatjuk:

---

[1] HÖLDER: Zur Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. 24. k. (183. o.) Lásd még LEBESGUE: Sur les séries trigonométriques. Ann. de l'École. Norm., 1903. (458. o.) és Leçons sur les séries trigonométriques. (6. o.)

$$\frac{F(x_0+h)-2F(x_0)+F(x_0-h)}{h^2} <$$

$$< \frac{F\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-2F(x_0)+F\left(x_0-\frac{h}{2}\right)}{\frac{1}{4}h^2} <$$

$$< \frac{F\left(x_0+\frac{h}{4}\right)-2F(x_0)+F\left(x_0-\frac{h}{4}\right)}{\frac{1}{16}h^2} < \cdots <$$

$$< \frac{F\left(x_0+\frac{h}{2^n}\right)-2F(x_0)+F\left(x_0-\frac{h}{2^n}\right)}{\frac{1}{4^n}h^2} < \cdots < F''(x_0).$$

De $x_0$-nak van olyan $h''$ környezete, melyben $F''(x)$ nem vesz föl $F''(x_0)$-nál kisebb értéket s így HÖLDER tétele szerint kellene, hogy elég nagy $n$-nél az

$$\frac{F\left(x_0+\frac{h}{2^n}\right)-2F(x_0)+F\left(x_0-\frac{h}{2^n}\right)}{\frac{1}{4^n}h^2} \geqq F''(x_0),$$

összefüggés álljon fenn, a mi fenti eredményünknek ellentmond.

Lemmánkat bebizonyítván, az (I) alatti tétel a következőképen látható át:

Vizsgáljuk az $F(x)$ függvényt az $x_0-2h_0$, $x_0-h$, $x_0$, $x_0+h$, $x_0+2h$ helyeken. Mindig találhatunk olyan $P(x)$ negyedrendű polinómot, hogy ezen az öt helyen az $F(x)-P(x)=0$ egyenlőség álljon fenn. Elemi számítással[1] kaphatjuk, hogy $P(x)$ ilyen alakú

$$P(x) = \frac{\Delta^4 F(x_0)}{24h^4}x^4+ax^3+bx^2+cx+d.$$

[1] A vizsgált öt pontban $F(x)$ és $P(x)$ megegyeznek, tehát ezekre a pontokra vonatkozó negyedik differencziahányadosaik is egyenlők. Azonban egy $n$-edrendű polinóm $n$-edik *differencziahányadosa* minden $x$ és $h$ értékre nézve állandó és egyenlő a legmagasabb tag együtthatójának és $n!$-nak szorzatával. Ebből a megjegyzésből $P(x)$ fenti alakja közvetetlenül folyik.

Minthogy az $F(x)-P(x)$ függvény az $(x_0-2h, x_0+2h)$ intervallum két végpontján és legalább három belső pontjában eltűnik, tehát az intervallum belsejében legalább két maximuma és két minimuma van. Azonfölül két olyan pontot, mely maximális függvényértéket ad, mindig elválaszt egy olyan pont, mely minimumnak felel meg és viszont. Maximumnak megfelelő helyen az $F''(x)-P''(x)$ függvény negativ vagy zérus, míg minimumot adó helyen ez az érték pozitiv vagy zérus. Tehát ennek a második deriváltnak az $(x_0-2h, x_0+2h)$ intervallum belsejében legalább egy minimuma és maximuma van.

Legyen $x_1$ olyan hely például, melyen az $F''(x)-P''(x)$ különbség minimális értéket vesz fel. Lemmánk szerint e helyen az $F(x)-P(x)$ függvény általánositott negyedik deriváltja pozitiv vagy zérus.

$$\lim_{t=0}\frac{\Delta^4[F(x_1)-P(x_1)]}{t^4}=\lim_{t=0}\frac{\Delta^4F(x_1)}{t^4}-\lim_{t=0}\frac{\Delta^4P(x_1)}{t^4}=$$

$$=\lim_{t=0}\frac{\Delta^4F(x_1)}{t^4}-\frac{\Delta^4F(x_0)}{h^4}\geqq 0.$$

Így tehát

$$\frac{\Delta^4F(x_0)}{h^4}\leqq\lim_{t=0}\frac{\Delta^4F(x_1)}{t^4}=\Phi(x_1).$$

Viszont, ha valamely $x_2$ helyen az $F''(x)-P''(x)$ különbség maximális értéket vesz fel,

$$\frac{\Delta^4F(x_0)}{h^4}\geqq\Phi(x_2)$$

és ezzel (I) alatti középérték tételünk teljes egészében be van bizonyítva.

Ez eredményből mindjárt a szummábilis sorok Du Bois-Reymond-féle tételét nyerhetnők, a melyből e sorok Cantor-féle tétele mint speciális eset adódnék, de tanulságosabbnak tartjuk az eddig mondottakból előbb Schwarz tételének közvetetlen általánosítását levezetni, a melyből azután folyik a dolgozatunk elején kimondott állítás.

A kivánt általánosítás így hangzik:

*Minden folytonos második deriválttal biró folytonos függvény, melynek általánosított negyedik deriváltja eltűnik, harmadrendű polinóm.*

Fenti tételünkből ugyanis következik, hogy tetszésszerinti $x_0$ és $h$ értékeknél

$$F(x_0+2h)-4F(x_0+h)+6F(x_0)-4F(x_0-h)+F(x_0-2h)=0. \tag{8}$$

Így tehát létezik oly harmedrendű polinóm $P_3(x)$, hogy a fent szereplő öt helyen

$$K(x)=F(x)-P_3(x)=0.$$

Ki fogjuk mutatni, hogy ez az egyenlőség azonosan fennáll. Egyrészt a fenti interpolácziós képletből közvetetlenül világos, hogy

$$K(x_0+nh)=0, \tag{9}$$
$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

mert hiszen (8)-nak $P_3$ is eleget tesz és így ugyancsak

$$K(x_0+2h)-4K(x_0+h)+6K(x_0)-4K(x_0-h)+$$
$$+K(x_0-2h)=0. \tag{10}$$

Elég tehát állításunk bebizonyítását pl. az $(x_0-2h, x_0+2h)$ intervallumra elvégezni; a többi intervallumokban teljesen hasonló helyzet áll fönn.

Evidens, hogy

$$K(x_0+2h)-4K\left(x_0+\frac{3h}{2}\right)+6K(x_0+h)-$$
$$-4K\left(x_0+\frac{h}{2}\right)+K(x_0)=0.$$

Ezt (9)-czel egybevetve:

$$K\left(x_0+\frac{3h}{2}\right)=-K\left(x_0+\frac{h}{2}\right).$$

Hasonló okoskodással:

$$-K\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=K\left(x_0-\frac{h}{2}\right)=-K\left(x_0-\frac{3h}{2}\right) \tag{11}$$

(10)-et újból alkalmazva

$$K\left(x_0+\frac{3h}{2}\right)-4K(x_0+h)+6K\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-$$
$$-4K(x_0)+K\left(x_0-\frac{h}{2}\right)=0. \tag{12}$$

(11) és (12) csak úgy állhatnak fenn együtt, ha

$$K\left(x_0+\frac{3h}{2}\right)=K\left(x_0+\frac{h}{2}\right)=K\left(x_0-\frac{h}{2}\right)=$$
$$=K\left(x_0-\frac{3h}{2}\right)=0. \tag{13}$$

A felezést tovább folytatván, látjuk, hogy $K$ eltűnik egy mindenütt sűrű ponthalmazban, így tehát folytonossága következtében mindenütt.

Visszatérhetünk ez előkészítő tételek után a trigonometrikus sorokhoz.

Legyen adva az

$$\tfrac{1}{2}a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$$

trigonometrikus sor, mely a (8) feltételnek eleget tesz s melynek szummája a $(0, 2\pi)$ intervallum minden helyén kivétel nélkül eltünik. Négyszeri tagonkinti integrálás után oly $F(x)$ függvényt nyerünk, melynek általánosított negyedik deriváltja Fejér idézett tétele szerint mindenütt zérus. Mivel továbbá a (8) alatti föltétel következtében az $F(x)$ függvény második differenciálhányadosa folytonos, tehát iménti tételünkből következik, hogy $F(x)$ harmadrendű polinóm és így

$$-\tfrac{1}{48}a_0x^4+C_0x^3+C_1x^2+C_2x+C_3=$$
$$=a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^4}+\cdots$$

A következtetés teljesen a Cantor tételnél alkalmazott mintájára mehet. A baloldali nem periódikus résznek el kell tünnie, a miből azután az egyes együtthatók eltünése következik.

Az eddig mondottakat most egy példán kivánjuk alkalmazni. Vizsgáljuk meg, hogy miért nem alkalmazható okoskodásunk pl. a Fejér-féle vizsgálatokban fontos szerepet játszó

$$\tfrac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx+\cdots$$

sorra, melynek szummája, mint már emlitettük, az $x=2k\pi$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ helyek kivételével zérus.

A tagonkint való négyszeri integrálással nyert

$$\frac{1}{48}x^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$$

sor tételünk értelmében a $(0, 2\pi)$ intervallumban egy harmadrendű polinóm Fourier-sora.[1] (Tételünk a $(0, 2\pi)$ intervallumra egész terjedelmében alkalmazható, mert ez intervallum belsejében nincsen kivételes hely.) Így tehát

$$P(x)=-\frac{1}{48}x^4+C_0x^3+C_1x^2+C_2x+C_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}. \quad (14)$$

Könnyen levezethetjük még a $C$ együtthatók értékeit és ez által függvénytani meggondolásainkból néhány sor értékét nyerhetjük. Ugyanis $P(x)$, $P'(x)$ és $P''(x)$ Fourier-sora egyenletesen összetartó és így e folytonos függvények az egész $(0, 2\pi)$ intervallumban megegyeznek Fourier-soruk értékével, vagyis

$$P(2\pi)=P(0),\quad P'(2\pi)=P'(0),\quad P''(2\pi)=P''(0). \quad (15)$$

Innét

$$C_0=\frac{1}{12}\pi,\quad C_1=-\frac{1}{12}\pi^2,\quad C_2=0.$$

A

$$P''(0)=2C_1$$

egyenlőség tekintetbe vételével mellékeredményként nyerjük az ismert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}\pi^2$$

---

[1] Ez természetesen közvetetlenül is átlátható.

egyenlőséget. A $C_0$, $C_1$, $C_2$, értékeket ismervén, ugyancsak a fenti (14) alatti egyenletből az ismeretes

$$\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{90} \pi^4 = C_3$$

egyenlőség is könnyen levezethető.

Ezek után látni való, hogy a

$$-\frac{1}{48} x^4 + \frac{\pi}{12} x^3 - \frac{\pi^2}{12} x^2 + \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$$

egyenlőség csak a $(0, 2\pi)$ intervallumban érvényes. Például a $(2\pi, 4\pi)$ intervallumban a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$$

sor értéke

$$-\frac{1}{48}(x-2\pi)^4 + \frac{\pi}{12}(x-2\pi)^3 + \frac{\pi^2}{12}(x-2\pi)^2 + \frac{\pi^4}{90} \neq P(x).$$

Látni való tehát, hogy előbbi okoskodásunk azért nem alkalmazható, mert az eredeti harmadrendű polinóm az $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ helyeken áthaladva, más és más harmadrendű polinómokban folytatódik.

Másként áll azonban a dolog, ha a vizsgált trigonometrikus sor együtthatói végtelen kicsinyek lesznek. Ekkor kimutathatjuk, hogy a tagonkint való négyszeri integrálásból nyert sor szükségképen *ugyanabban* a harmadrendű polinómban folytatódik a $2\pi$ helyen túl is, sőt az egész valós tengelyen; így tehát a 17. oldal következtetései itt alkalmazhatók.

Be fogjuk bizonyítani, hogy, ha valamely

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

trigonometrikus sor együtthatói $n$ növekedtével minden határon túl csökkennek, akkor a tagonkint való négyszeres integrálásból nyert $F(x)$ sorra nézve

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^4 F(x)}{h^3} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{F(x+2h)-4F(x+h)+6F(x)-4F(x-h)+F(x-2h)}{h^3} = 0,$$

minden $x$ értékre. Ránk nézve épen az a fontos, hogy ez az egyenlőség teljesen független attól, hogy az illető helyen az eredeti sor szummábilis-e.

Tegyük fel egy pillanatra, hogy e tételt már bebizonyítottuk. Legyen $x_0$ az általában szummábilis és eltünő trigonometrikus sorunknak egy izolált kivételes helye. Az $F(x)$ függvény a 16. oldalon mondottak szerint $x_0$-tól jobbra (egy bizonyos környezetben) egy

$$a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1,$$

balra pedig egy

$$a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2$$

alakú polinómmal egyezik meg. Erre az $F(x)$ függvényre a (16) alatti relácziót alkalmazván, nyerjük, hogy

$$a_1=a_2.$$

Másrészt úgy az

$$F(x) = \frac{a_0x^4}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4}$$

sor, mint pedig első és második differencziálhányadosai minden helyen folytonosak, a miből azután a

$$b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad d_1 = d_2$$

egyenlőségek következnek.

Ez eljárást folytatólagosan alkalmazván, ugyanezt az eredményt nyerhetjük a nem izolált szinguláris helyekre is, a mi által az 10. oldalon a zérus felé tartó együtthatójú trigonometrikus sorokra kimondott tételünk teljes egészében be lesz bizonyítva.

Ki kell azonban előbb mutatnunk a (16) alatti egyenlőséget. E czélból csak azt a gondolatmenetet kell egy kissé módositanunk, melyet Riemann az analóg tétel (7. o.) bebizonyításánál követ. (Ebből a tételből is egyszerűen folyik állításunk.)

Tudjuk, hogy

$$\frac{F(x+4h)-4F(x+2h)+6F(x)-4F(x-2h)+F(x-4h)}{16h^4}=$$

$$=A_0+A_1\left(\frac{\sin h}{h}\right)^4+\cdots+A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^4+\cdots$$

a hol

$$A_n=a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Oszszuk fel ezt a sort három részre. Az első rész a sor minden olyan tagját tartalmazza, melynek indexe kisebb, mint $m$. Viszont ezt az $m$ számot úgy választjuk, hogy ezen túl $a_n$ és $b_n$ kisebbek, mint $\varepsilon$. A második részbe azokat a tagokat soroljuk, melyekre nézve $nh\leqq$ mint egy bizonyos állandó $c$ szám. Végül a harmadikba a többi tagot. Világos, hogy, ha $h$ minden határon túl csökken, akkor az első rész határolt marad s így kisebb, mint egy állandó $G$ szám, a második rész kisebb, mint $\varepsilon\frac{c}{h}$, a harmadik pedig

$$<\varepsilon\sum_{c>nh}^{\infty}\frac{1}{\frac{1}{16}n^4h^4}<\varepsilon\left(\frac{16}{c^4}+\frac{16}{3hc^3}\right)^{1}$$

Így tehát

$$2h\left[A_0+A_1\left(\frac{\sin h}{h}\right)^4+\cdots+A_n\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^4+\cdots\right]<$$

$$<2h\left(G+\frac{\varepsilon c}{h}+\frac{16\varepsilon}{c^4}+\frac{16\varepsilon}{3hc^3}\right),$$

vagyis csakugyan

$$\lim_{h=0}\frac{\Delta^4F(x)}{h^3}=0.$$

---

1 Ezt az egyenlőtlenséget a

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\int_n^{\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

$$(\alpha>1)$$

egyenlőtlenségből nyerjük.

## A Lebesgue-féle integrálfogalom.

Reá fogunk most térni Du Bois-Reymond tételére, mely a trigonometrikus sor összetartásából következteti, hogy Fourier-sorral van dolgunk. Mi analóg tételt fogunk megadni szummábilis sorokra. Du Bois-Reymond alapvető tételének teljes jelentősége azonban csak a Lebesgue-féle integrálfogalom bevezetésével domborodik ki. Ezt az integrálfogalmat röviden jellemezni fogjuk.

*Mérhető halmazok.* A halmazok mérésének problémájával először Cantor, majd utána Jordan foglalkozott. A mérték fogalmának teljesen általános és pontos értelmezése azonban nagyrészt Borel[1] érdeme. Ő pl. egyméretű halmazok esetén ezeket posztulálja:[2]

Bármely határolt egyméretű halmazhoz tartozzék egy szám: a halmaz mértéke, a mely pozitiv vagy zérus és a mely a következő tulajdonságokkal birjon:

1°. *Két egybevágó halmaz mértéke egyenlő.*

2°. *Ha valamely halmazt csupa különböző pontokból álló véges számú, avagy megszámlálható sokaságú halmazból teszünk össze, úgy az előbbi halmaz mértéke egyezzék meg az utóbbiak mértékének az összegével.*

3°. *A* (0, 1) *pontköz mértéke* 1.

Látnivaló, hogy többméretű halmazoknál csak 3°-at kell megfelelően helyettesíteni.

Lebesgue «thèse»-ében[3] e posztulátumokból kiindulva meg is ad egy eljárást, mely tetszésszerinti méretű halmaz mértékének meghatározására alkalmazható. A módszert egyszerű-

---

[1] Borel: Leçons sur la théorie des fonctions. (Paris, Gauthier-Villars, 1898.)

[2] Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. (Paris, Gauthier-Villars, 1904.)

[3] Intégrale, longueur, aire. Annali di Matematica 1902.

ség kedvéért egyméretű halmazra írjuk le; a gondolatmenet közvetetlenül általánosítható.

Legyen $E$ oly ponthalmaz, melyet egy $I$ intervallum teljesen magába zár. Zárjuk be a ponthalmaz összes pontjait megszámlálható sokaságú intervallumokba. Határozzuk meg ez intervallumok mértékeinek[1] összegét, $\alpha$ pedig jelentse ennek az összegnek az alsó határát, ha az intervallumokat minden lehetséges módon választjuk. Így minden halmazhoz rendelünk egy határozott számot. Legyen $\beta$ az a szám, melyet analóg módon az $I$ intervallumnak az $E$ halmazon kívül eső pontjaihoz rendelünk. Ha $\alpha+\beta$ egyenlő az $I$ intervallum hosszával, akkor $E$-t mérhető halmaznak, $\alpha$-t pedig az $E$ halmaz mértékének nevezzük. Könnyű kimutatni, hogy az így értelmezett mérték-fogalom a Borel-féle követeléseknek minden tekintetben megfelel.

Úgy Borel követeléseiből, mint a Lebesgue-féle szerkesztő értelmezésből következik zérus mértékű halmazok létezése (ensemble de mesure nulle). Így minden határolt tartományban fekvő, megszámlálható halmaz, pl. egy intervallumban található raczionális számok halmaza, zérus mértékű. De ilyen pl. a Cantor-féle, híres, sehol sem sűrű, perfekt halmaz is, pedig ennek számossága kontinuum.

Egy vagy több változó $f$ *függvényét* akkor nevezzük *mérhetőnek,* ha tetszésszerinti $a$, $b$ számoknál, azoknak a helyeknek a halmaza, melyekben $a<f<b$, mérhető. Világos, hogy a folytonos, a monoton s így a korlátolt változású függvények (fonction à variation bornée) mind mérhetők. *Mérhető függvények sorozatának határfüggvénye* — ha létezik — *szintén mérhető.*

*Az integrál értelmezése.* Legyen adva az $f$ mérhető függvény; oszszuk be a $-\infty$-től $+\infty$-ig terjedő valós számközt az $l_i$ növekvő számok segélyével megszámlálható sokaságú részre ($i$ $-\infty$-től $+\infty$-ig halad az egész számok során). A közbeiktatott számokat úgy választjuk, hogy $l_{i+1}-l_i$ kisebb marad,

---

[1] Borel posztulátumaiból közvetetlenül világos, hogy bármely intervallum mértékét az intervallum hossza adja.

mint $\eta$. Jelöljük $e_i$-vel azoknak a helyeknek a mértékét, melyekben

$$l_i \leqq f < l_{i+1}.$$

Ezek után képezzük a

$$\sum_{-\infty}^{\infty} l_i e_i = A$$

végtelen sort. Ez a sor általánosságban nem lesz feltétlenül összetartó, de mindenesetre az, ha $f$ határolt, mert hiszen ekkor véges összeggel van dolgunk. Esetleg más függvényekre nézve is összetartó lehet.

Tegyük fel, hogy sorunk feltétlenül összetartó és iktassunk az $l_i$ számok közé más számokat. Így az $A$ sort más $A_1$ sorral helyettesítettük, melyről könnyen igazolható, hogy szintén feltétlenül összetartó. Ezt az eljárást folytatjuk úgy, hogy a közbeiktatott szomszédos számok különbsége egyenletesen minden határon túl csökkenjen. Az így nyert $A$, $A_1$, $A_2, \ldots$ összegek növekvő sorozatot alkotnak ugyan, azonban mind ugyanazon véges határ alatt maradnak. (Kisebbek mint $A+\eta I$, a hol $I$ az $I$ intervallum hosszát jelenti.) Ezeknek az $A$ összegeknek a határértékét az $f$ függvény $I$-ben vett *integráljának* nevezzük. Mint láttuk, ez mindig létezik, ha egy $A$ sor föltétlenül összetartó. Mindama függvényeket, melyeknél ez teljesítve van, Lebesgue-*féle értelemben integrálhatóknak mondjuk.*[1]

Most még bizonyítás nélkül gyorsan felsoroljuk a Lebesgue-féle integrál fontosabb sajátságait.

Ha valamely határolt függvénynek Riemann-féle integrálja létezik, akkor létezik a Lebesgue-féle is és a másikkal megegyezik. Rövidség kedvéért az integrálható szót ezentúl mindig a Lebesgue-féle értelemben fogjuk használni.

Ha $f$ integrábilis, $\varphi$ pedig integrálható és határolt, akkor az $f\varphi$ szorzat integrálható. Így tehát bármely integrálható $f$ függvény Fourier-együtthatói értelmezhetők. Világos, hogy az integrálok összeadási tételei szintén fennállanak.

---

[1] Evidens, hogy az integrál értéke a beosztás módjától nem függ.

*Ha integrálható függvények határfüggvénye határolt, akkor szintén integrálható.* Úgy hiszszük, ennek a tételnek a fontosságát fölösleges részletezni. De még többet is állíthatunk. *Legyen adva oly mérhető* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ *függvények sorozata, melyek abszolut értékben mind kisebbek, mint egy adott K szám. Ha e függvények az I intervallumban egy f felé konvergálnak, akkor ennek integrálja* $f_n$ *integráljának határértéke.*

Világos, hogy e tétel, melyet gyakran fogunk alkalmazni, akkor is fennáll, ha egy zérus mértékű halmazban az $f_n$ függvények nem konvergálnak $f$ felé.

## Du Bois-Reymond tétele.

Cantor tétele szerint egy függvénynek legfeljebb *egy* összetartó trigonometrikus sorfejtése lehet. E tétel értelmében ez a sorfejtés mindig a Fourier-féle, ha a függvény Fourier-sora összetartó és a függvényt ábrázolja, de nem létezik-e más esetekben is oly trigonometrikus sor, mely mindenütt összetartó és a függvényt elő is állítja?

Dini, Ascoli és P. Du Bois-Reymond foglalkoztak ezzel a kérdéssel. Az utóbbi a problémát nagy lépéssel előre vitte. Eredményének a bebizonyitását némi tekintetben tökéletesbítették Harnack és Hölder.

Mi Du Bois-Reymond tételét mindjárt Lebesgue fogalmazásában mondjuk ki. Ez a szép fogalmazás az imént ismertetett integrálfogalom bevezetésével vált lehetővé.

Ugyanis, ha egy trigonometrikus sor *összetartó,* akkor az ábrázolt függvény *mérhető,* ha most még felteszszük róla, hogy *határolt,* akkor mindenesetre *integrálható* is. Az említett tétel így szól:

*Minden olyan trigonometrikus sor, mely a* (0, $2\pi$) *intervallumban (legfeljebb egy reduktibilis halmaz kivételével) összetartó és ebben határolt függvényt ábrázol, e függvény* Fourier-*sora.*

Du Bois-Reymond álláspontján még a Fourier-féle együtthatók létezését kellett külön feltételezni. Mint Lebesgue megjegyzi, tényleg létezik olyan Riemann-*féle értelemben nem integrálható határolt függvény,* melyet egy összetartó trigonometrikus sor mindenütt *előállít.* Látnivaló, hogy az új integrálfogalom bevezetése mennyivel általánosabbá és egységesebbé teszi a trigonometrikus sorok elméletét.

A következőkben Du Bois-Reymond tételének analogonját adjuk szummábilis sorok esetére.

*Legyen adva egy trigonometrikus sor, melynek* $a_n$, $b_n$ *együtthatóiból képezett*

$$\frac{|a_n|+|b_n|}{n^2} \tag{17}$$

*sor összetartó. Ha a trigonometrikus sor kivétel nélkül szummábilis és szummája határolt függvény, akkor sorunk e függvény* Fourier-*sora.*

*Ha a sor együtthatói n növekedtével minden határon túl csökkennek, akkor állításunk még kivételes helyek reduktibilis halmazának a megengedésével is érvényben marad.*

Első tételünk egyszerű következménye a 12-ik oldalon kimondott középérték-tételnek.

Legyen ugyanis adva oly

$$\Sigma c_n z^n = \Sigma (a_n + ib_n) z^n$$

alakú hatványsor, melynek valós vagy képzetes része az egység sugarú kör kerületén szummábilis. Könnyű bebizonyítani, hogy ekkor a hatványsor a körön belül összetartó. Ugyanis a szummabilitásból kifolyólag

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n} = 0.$$

Tegyük fel, hogy például a valós rész szummábilis. Ez az egységkör kerületén a $z=e^{i\varphi}$ helyettesitéssel ily alakú lesz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi.$$

Jelentse $f(\varphi)$ e sor szummáját. Integráljuk még ezt a sort tagonkint négyszer és jelöljük az így nyert egyenletesen összetartó sort $F(\varphi)$-vel.

$$F(\varphi) = \frac{a_0\varphi^4}{24} + \sum_1^\infty \frac{a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi}{n^4}.$$

Bevezetjük még a következő jelöléseket:

$$f(r, \varphi) = a_0 + \sum_1^\infty r^n (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi),$$

$$F(r, \varphi) = \frac{a_0\varphi^4}{24} + \sum_1^\infty r^n \frac{(a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi)}{n^4}.$$

Látni való, hogy

$$f(1, \varphi) = f(\varphi) \quad \text{és} \quad F(1, \varphi) = F(\varphi).$$

Mint tudjuk az $F(\varphi)$ sor általánosított negyedik differencziálhányadosa minden helyen az illető $f(\varphi)$ érték. $F(\varphi)$ második differencziálhányadosa folytonos lévén, a

$$\frac{\Delta^4 F(\varphi, h)}{h^4} =$$

$$= \frac{F(\varphi+2h) - 4F(\varphi+h) + 6F(\varphi) - 4F(\varphi-h) + F(\varphi-2h)}{h^4} \tag{18}$$

mennyiség a 12-ik oldal tétele szerint az összes $\varphi$ és $h$ értékekre nézve a kerületi $f(\varphi)$ függvény alsó és felső határa között fekszik. Azonban egy meghatározott $h$ értéknél a

$$\frac{\Delta^4 F(r, \varphi, h)}{h^4} =$$

$$= \frac{F(r, \varphi+2h) - 4F(r, \varphi+h) + 6F(r, \varphi) - 4F(r, \varphi-h) + F(r, \varphi-2h)}{h^4}$$

harmonikus függvény értékkészlete e függvény kerületi értékeinek, vagyis a $\frac{\Delta^4 F(\varphi, h)}{h^4}$ mennyiségeknek alsó és felső határa s így az előbbiek szerint az $f(\varphi)$ függvény alsó és felső határa között fekszik.

Másrészt világos, hogy meghatározott $r$ és $\varphi$ értékeket szemelvén ki

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^4 F(r, \varphi, h)}{h^4} = \frac{\partial^4 F(r, \varphi)}{\partial \varphi^4} = f(r, \varphi).$$

Így tehát ugyancsak az összes $f(r, \varphi)$ értékek az $f(\varphi)$ kerületi függvény alsó és felső határa között foglaltatnak.

Ha most felteszszük, hogy $f(\varphi)$ határolt, akkor $f(r, \varphi)$ is minden $r$ és $\varphi$ értéknél az. Ekkor tehát Lebesgue egyik idézett tétele értelmében

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi = \lim_{r=1} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \varphi)\cos n\varphi d\varphi = \lim_{r=1} a_n r^n.$$

Vagyis

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Egy másik bizonyítást is adunk, mely azután kivételes helyekkel biró függvényekre is általánosítható lesz. Egyelőre felteszszük, hogy ilyen kivételes helyek nincsenek. Ki fogjuk mutatni a következő tételt:[1]

Ha a folytonos $\Phi$ függvény általánosított második differencziálhányadosa $F$ szintén folytonos, negyedik általánosított differencziálhányadosa pedig mindenütt létezik és határolt, akkor

$$F(x) = \int_0^x \int_0^\theta f(t)\, dt d\theta + Ax + B,$$

a hol $A$ és $B$ állandók.

Minthogy

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^4 \Phi(x, h)}{h^4} = f(x),$$

[1] A bizonyítás lényegében követi Lebesgue gondolatmenetét, melyet ő egy analóg tétel bebizonyításánál alkalmaz.

tehát $\dfrac{\Delta^4\Phi(x, h)}{h^4}$ minden $x$ és $h$ értéknél határolt s így, ha $\Phi$ egy határozatlan integrálját $\Phi_1$-gyel, ennek egy határozatlan integrálját pedig $\Phi_2$-vel jelöljük

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^4[\Phi_1(x, h) - \Phi_1(0, h)]}{h^4} = \int_0^x f(t)\,dt,$$

$$\lim_{h=0}\left[\frac{\Delta^4\Phi_2(x, h)}{h^4} - \frac{\Delta^4\Phi_2(0, h)}{h^4} - \frac{\Delta^4\Phi_1(0, h)}{h^4}\,x\right] =$$

$$= \int_0^x \int_0^\theta f(t)\,dt d\theta.$$

Világos, hogy az első két határérték létezik, mert $\Phi_2$ kétszer differencziálható függvény kétszeres integrálja lévén, bir közönséges értelemben vett negyedik differencziálhányadossal is. A jobboldali integrál is létezik, tehát a baloldali harmadik határérték is létezik.

Másrészt evidens, hogy

$$\lim \frac{\Delta^4\Phi_2(x, h)}{h^4} = \Phi''(x) = F(x)$$

s így csakugyan ered

$$F(x) = \int_0^x \int_0^\theta f(t)\,dt d\theta + Ax + B.$$

Térjünk most vissza $f(x)$ eredeti jelentéséhez. Legyen $f(x)$ egy a Fejér-féle eljárással összegezhető trigonometrikus sor:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

és

$$\Phi(x) = \frac{a_0 x^4}{24} + \cdots + \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4} + \cdots,$$

akkor

$$F(x) = \Phi''(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \cdots - \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} + \cdots$$

a (17) feltétel szerint szintén egyenletesen összetartó. Használjuk együtthatóinak a meghatározására a F

Lesz :

$$-\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{x}\int_0^{\theta} f(t)\cos nxdtd\theta dx-\frac{2a_0}{n^2},$$

$$-\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{x}\int_0^{\theta} f(t)\sin nxdtd\theta dx+\frac{2a_0\pi}{n}.$$

$$(n>0)$$

Könnyen kimutatható, hogy az integráczió sorrendjét megváltoztathatjuk és így nyerjük

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt+2\left[a_0-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt-n\left[2\pi a_0-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,(2\pi-t)\,dt\right].$$

Tudjuk, hogy sorunk szummabilitásából következnek a

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n}=0 \quad \text{és} \quad \lim_{n=\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

egyenlőségek.

Minthogy a $b_n$ kifejezésében szereplő első integrál zérus felé közeledik, a most mondottakból világos, hogy

$$2\pi a_0-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,(2\pi-t)\,dt=0.$$

Másrészt természetesen az $a_n$ kifejezésben szereplő első integrál szintén zérus felé közeledik. Ha tehát az $a_n$-ben előforduló zárójeles kifejezés nem zérus, akkor $a_n$ egy elég nagy $n$-től kezdve állandó előjelű és abszolút értékben nagyobb egy bizonyos számnál s így sorunk a zérus helyen nem lehetne szummábilis. Így tehát végül

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt, \tag{20}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin ntdt.$$

Ha a sor együtthatói zérus felé tartanak és a sor a $(0, 2\pi)$ intervallumban egy reduktibilis halmazban nem szummábilis, vagy pedig szummája ezekben a pontokban nem marad a véges határok között akkor minden intervallumban, mely ilyen helyet nem tartaltalmaz, a $\Phi(x)$ függvény az $\frac{a_0x^4}{24}+\sum\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^4}$ sortól legfeljebb egy harmadrendű polinómban különbözik.

A $\lim\limits_{h=0}\frac{\Delta^4\Phi(x)}{h^3}=0$ segédtételből azonban következik, hogy ezek a harmadrendű polinómok mind megegyeznek s ekkor már az ismert eljárás alkalmazható.

## Néhány megjegyzés.

A következőkben eddig nyert eredményeink általánosságát teszszük birálat tárgyává.

I. Mint ismeretes, ha az

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$$

sor egy intervallumban szummábilis, akkor fennállanak a sokszor felhasznált

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n}=0 \quad \text{és} \quad \lim_{n=\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

egyenlőségek. Többnyire azonban még azt a megszorítást is tettük, hogy a sorunk együtthatóiból képezett

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|+|b_n|}{n^2} \tag{21}$$

sor összetartó. Látnivaló, hogy bizonyításunkban ez az utóbbi megszorítás mindenesetre elegendő, de nem szükséges feltételt képez. Vizsgálatainkban csak az szükséges, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^4} \tag{22}$$

sor által ábrázolt függvénynek határolt és folytonos második differencziálhányadosa legyen. A második differencziálhányados mindenesetre «mérhető függvény», tehát, ha határolt, akkor integrálható is és így van Fourier sora. Parcziális integráczióval nyerhetjük, hogy e sor együtthatói

$$\alpha_n = -\frac{a_n}{n^2} \quad \text{és} \quad \beta_n = -\frac{b_n}{n^2} \tag{22'}$$

Másrészt a (22) alatti függvény második differencziálhányadosa így írható:

$$-\lim_{h=0}\Big[(\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x)\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 + \cdots +$$
$$+ (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 + \cdots\Big], \tag{23}$$

hol $\alpha_n$-nek és $\beta_n$-nek a (22′) alatti jelentés tulajdonítandó. Így tehát egészen általánosan a következő kérdést vethetjük fel: Milyen feltételt kell egy Fourier-sor együtthatóinak teljesíteni, hogy a sor a Riemann-féle eljárással összegezve folytonos függvényt szolgáltasson?

Néhány egyszerű meggondolással átláthatjuk, hogy ezzel teljesen egyenértékű a következő kérdés:

*Adva lévén az $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ számok sorozata, mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy ezek valamely folytonos függvény* Fourier-*féle együtthatói legyenek?*

Erre látszólag könnyű válaszolni. Hölder tételéből (13. o.) következik például, hogy ez a szükséges és elegendő feltétel, hogy (23) $h$ kisebbedésével minden $x$ helyen egyenletesen közeledjék valamilyen érték felé. Avagy a bevezetésben mondottak alapján szükséges és elegendő feltétel, hogy a FEJÉR-féle összegek egyenletesen konvergáljanak.

Azonban mindkét állítás tulajdonképen végtelen sok feltételt tartalmaz. Olyan egyszerű alakú feltételnek a szerkesztése, mely egyedül az együtthatókat, nem pedig az $x$ változót is tartalmazza, egyelőre nagy nehézségekbe ütköző, de rendkívül érdekes probléma.

II. A (21) alatti megszorítás még úgy is eliminálható lenne, ha kimutatnók, hogy vizsgálatainkhoz a második (általánosított) differencziálhányados folytonosságára nincs szükségünk. Így például, ha a SCHWARZ-féle tétel analogonja helyébe a következő tételt tehetnők: Minden folytonos függvény, melynek általánosított negyedik differencziálhányadosa azonosan eltűnik, harmadrendű polinóm.

Az a függvény, mely

$$=x^2 \quad \text{ha} \quad x \geqq 0$$

és

$$=-x^2 \quad « \quad x \leqq 0$$

jó ellenpéldát szolgáltat. E folytonos függvénynek általánosított negyedik differencziálhányadosa mindenütt eltűnik, sőt első differencziálhányadosa is folytonos; általánosított második differencziálhányadosa mindenütt létezik, de az $x=0$ helyen szakadása van.

Ez a példa világosan mutatja, hogy az általánosított második differencziálhányados folytonosságára vonatkozó megszorításunk szükséges volt.
Hasonló következik egyéb differencziálhányadosokra, de ennek részletezésére nem térünk ki, mert ez nagyon messze vezetne tulajdonképeni vizsgálatainktól.

III. Szóltunk eddig a RIEMANN-féle és FEJÉR-féle szummálásról. Megvizsgáltuk, hogy mit következtethetünk egy trigonometrikus sor együtthatóira, ha ez eljárások valamelyike a sor összegéül zérust ad. Nem tárgyaltuk ily értelemben az ú. n. POISSON-féle szummáló eljárást. Láttuk előbb, hogy az

$$f(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi+\cdots+a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi+\cdots \tag{24}$$

trigonometrikus sorhoz képezhetjük az

$$f(r,\varphi)=a_0+(a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)r+\cdots+$$
$$+(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)r^n+\cdots \tag{25}$$

sort,[1] mely minden $r<1$ értéknél összetartó például akkor, ha sorunk valamely $f(\varphi)$ függvény Fourier sora.

Vagy például összetartó, ha találhatunk olyan (valós) $k$ számot, hogy

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n^k}=\lim_{n=\infty}\frac{b_n}{n^k}=0.$$

Ha a trigonometrikus sor egy $\varphi$ helyen összetartó, és $r$ 1-nél kisebb számokon 1 felé tart, akkor Abel klasszikus tétele szerint

$$\lim_{r=1} f(r,\varphi)=f(\varphi). \tag{26}$$

A baloldali határérték azonban, mint jól tudjuk, akkor is létezhetik, ha a sor széttartó. (Így például, mint Frobenius kimutatta, mindig létezik, ha a számtani közepek módszere czélvezet.) Minden ilyen esetben Poisson, ki a (25) alatti sort a Fourier-sorral kapcsolatban vizsgálta, a (26) határértéket az $f(\varphi)$ sor összegének tekinti. Ezt a sugár menti szummáló eljárást fogjuk Poisson-féle *szummálásnak* nevezni.

Érdekes volna problémáinkat ebben a megvilágításban is részletesen megvizsgálni.

Előbbi vizsgálatainkból önként folyik a következő állításunk:

Ha az $f(\varphi)$-hez tartozó

$$a_0+(a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi)r+\cdots+(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)r^n+\cdots$$

harmonikus függvény az egységkör belsejében «határolt» és kerületi helyek felé a sugáron haladva, ezekben legfeljebb egy

---

[1] Tudvalévő, hogy az ilyen $f(r,\varphi)$ sor harmonikus függvényt ábrázol és hogy viszont minden harmonikus függvény felírható ebben az alakban.

zérus mértékű halmaz kivételével határértékül zérust ad, akkor az $a_n$, $b_n$ együtthatók is eltűnnek s így a függvény azonosan zérus.

Ez a tétel magában foglalja (kör esetén) a harmonikus függvények egyik alaptételét, mely szerint, ha a harmonikus függvény a kerületen eltűnik, akkor a görbe belsejében is eltűnik. U. i. abból, hogy a kerület minden pontja felé tetszésszerinti úton közeledhetünk, a függvény határolt volta egyszerűen következik.

Bebizonyítása a LEBESGUE-féle integráltételek alapján úgy történik, mint a 26-ik oldal tételeé.

Az

$$\frac{1}{1-z}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}+z+z^2+\cdots$$

függvény valós része,

$$\tfrac{1}{2}+r\cos\varphi+\cdots+r^n\cos n\varphi+\cdots$$
$$(z=re^{i\varphi}),$$

mint tudjuk, a $z=1$ hely kivételével az egységkör kerületének minden helyén határértékül zérust ad, de a függvény, mint látjuk, még sem tünik el identikusan.

Sőt szerkeszthető oly el nem tűnő függvény, mely egy kör belsejében harmonikus s a kerületi helyek felé a sugáron haladva határértékül *kivétel nélkül* zérust ad.

Ilyen függvény például az

$$x^2+y^2-1=0$$

egységkörben

$$u=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

(Látni való, hogy ez a függvény az

$$x=1,\quad y=0$$

hely környezetében csak a valós tengely mentén marad határolt.) Ezt a példát HOLMGREN úr szóbeli közlésének köszönöm

Az $x$, $y$ koordinátákat az $r$, $\varphi$ polárkoordinátákkal helyettesítvén, oly trigonometrikus sort kapunk, melynek összegét a POISSON-*féle szummáló eljárás kivétel nélkül zérusban állapítja meg* és a sor együtthatói még sem tűnnek el valamennyien. Ez a példa azt mutatja, hogy, ha a CANTOR-féle tételt a POISSON-féle szummálás esetére akarjuk általánosítani, szintén kell sorunk együtthatóira megszorítást tenni. Mint láttuk, alkalmas megszorításhoz jutunk, ha felteszszük, hogy a sorhoz tartozó harmonikus függvény határolt. Ehhez, mint FATOU megjegyzi, szükséges, hogy a sor együtthatóinak négyzetösszege

$$\Sigma a_n^2 + b_n^2$$

összetartó legyen. Könnyen átlátható, hogy a határoltság elejtésével ez az utóbbi megszorítás is elegendő a CANTOR-féle tétel általánosítására. Mint RIESZ F.[1] kimutatja, ez az utóbbi feltételünk akkor és csak akkor van kielégítve, ha trigonometrikus sorunk egy integrálható és integrálható négyzetű függvénynek FOURIER-sora.

## II. Hatványsorok összegezhetősége az összetartási körön.

Tudva lévő, hogy léteznek olyan hatványsorok, melyekre nézve az összetartási kör valamennyi helye szinguláris, a melyeknek tehát ez a kör természetes határát képezi és a melyek mindennek daczára a kör egész kerületén összetartók. Viszont például az

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

függvénynek az egységkörön (és az egész síkban) egyetlen szingularitása $z=1$ és a sor az egész körön széttartó. Látjuk tehát, hogy egyes esetekben a körön lévő szingularitások mennyire befolyásolják a szabályossági helyeken is a sor összetartását.

[1] F. RIESZ: *C. R.* 11 mars 1907. — Götting. Nachr. 1907.

Az esetek sokféleségébe új szempontot visz FATOU[1] egy érdekes tétele:

*Minden*

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

*hatványsor, melynek együtthatói zérus felé tartanak és a melynek összetartási köre az egységkör, e kör kerületének minden szabályossági helyén összetartó.*

Másrészt könnyű átlátni, hogy FATOU feltétele egyszersmind szükséges is ahhoz, hogy a sor az egységkör összes szabályossági helyein (ha ilyenek egyáltalában léteznek), összetartó legyen.[2] (8. o.)

Az a feltételünk, hogy az összetartási kör sugara az egység, a tétel alkalmazhatóságát természetesen nem szorítja meg. Ha ugyanis az együtthatók zérus felé tartanak, akkor az összetartási kör sugara $\geqq 1$. Általánosságban, ha a sugár véges és $\neq 0$, akkor a hatványsorból egyszerű átalakítással oly sort nyerünk, melyre FATOU tétele közvetetlenül alkalmazható.

A továbbiakban mindig felteszszük, hogy a vizsgált hatványsor *összetartási sugara az egység.*

Ha a fenti tételben szereplő

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

sort differencziáljuk, a

$$\Sigma nc_nz^{n-1}=\Sigma C_nz^n$$

sort nyerjük, melynek jellemző tulajdonsága, hogy benne

$$\lim_{n=\infty}\frac{C_n}{n}=0.$$

Az ilyen sorokra általánosságban FATOU tétele természetesen már nem alkalmazható és e sor az összetartási kör minden szabályossági helyén is divergens lehet. *Az ilyen sorok azonban a számtani közepek módszere szerint összegezhetők az*

[1] FATOU: Séries trigonométriques et séries de TAYLOR. Acta Math. 30. k. (389. o.)

[2] Sőt, ha e feltétel nincsen teljesítve, a hatványsor sehol sem lehet a kerületen összetartó.

*összetartási kör minden szabályossági helyén.* Ki fogjuk ugyanis mutatni a következő általános tételt.

*A*

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_n}{n^k} = 0 \qquad (k=1, 2, 3, \ldots) \tag{27}$$

*egyenlőség szükséges és elegendő feltétele annak,*[35] *hogy valamely*

$$C_0 + C_1 z + \cdots + C_n z^n + \cdots$$

*sor a számtani közepek módszerének k-szoros alkalmazásával az összetartási kör minden szabályossági helyén összegezhető legyen.* Ekkor azután ez az összeg FROBENIUS,[1] illetőleg HÖLDER[2] tételei szerint az illető helyhez tartozó függvényértéket meg is adja.

Állításunk bebizonyitásában FATOU fenti tételére támaszkodunk.

Legyen először $k=1$, vagyis a

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots$$

hatványsorban

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_n}{n} = 0. \tag{28}$$

Legyen pl. $z=1$ a függvény szabályossági helye. Okoskodásunk általános lesz ugyan, de egyszerűség kedvéért csak erre a helyre végezzük.

A hatványsor közvetetlen folytatását az által képezzük, hogy az összetartási kör belső helyei körül új sorbafejtéseket eszközlünk s így a hatványsor által értelmezett analitikai függvénynek új elemeit nyerjük. Ezeknek az elemeknek összetartási körei oly tartományt borítanak be, melynek helyeihez a köz-

---

[1] Ha a (27) alatti egyenlőség nem áll fenn, de a $\frac{C_n}{n^k}$ mennyiség véges határok között marad, akkor a további vizsgálatokból könnyen kimutatható, hogy a $k$-adrendű számtani közepek is véges határok között maradnak.

[2] HÖLDER: Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze. Math. Ann. 20. k.

vetetlen folytatásból nyert különböző függvényelemek ugyanazt az értéket rendelik. A jelzett módon értelmezett, tartományunkban egyértékű analitikai függvényt $f(z)$-vel jelöljük.

Egyszerűség kedvéért felteszszük még, hogy

$$f(1)=f'(1)=0. \tag{29}$$

Ezt egy alkalmasan megválasztott lineáris kifejezés levonásával mindig elérhetjük, viszont világos, hogy a sor kezdőtagjainak a megváltoztatása a szummabilitáson nem változtat Ezek után egy egyszerű számítás czélra vezet.

A sor részletösszegei a $z=1$ helyen

$$s_0=C_0,\ s_1=C_0+C_1,\ldots,s_n=C_0+\cdots+C_n,\ldots$$

Ezek számtani közepei

$$S_0=s_0,\ldots,S_n=\frac{s_0+s_1+\cdots+s_n}{n+1},\ldots$$

Könnyen levezethetők az

$$s_0+s_1z+\cdots+s_nz^n+\cdots=\frac{f(z)}{1-z},$$

$$s_0+(s_0+s_1)z+\cdots+(s_0+s_1+\cdots+s_n)z^n+\cdots=\frac{f(z)}{(1-z)^2},$$

$$S_0z+S_1z^2+\cdots+S_nz^{n+1}+\cdots=\int_0^z\frac{f(z)}{(1-z)^2}dz,$$

$$S_0z+(S_1-S_0)z^2+\cdots+(S_n-S_{n-1})z^{n+1}+\cdots=(1-z)\int_0^z\frac{f(z)}{(1-z)^2}dz \tag{30}$$

azonosságok, a melyekben

$$|z|<1$$

és a melyekben az integrálást is az egységkörön belül végeztük. Másrészt (29) alatti feltételünk szerint az $f(z)$ függvény a $z=1$ hely környezetében így fejthető sorba:

$$f(z)=\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(z-1)^3+\cdots$$

Így tehát az

$$(1-z)\int_0^z \frac{f(z)}{(1-z)^2}\,dz$$

függvény, (az integrálást megfelelő úton végezvén), a $z=1$ hely környezetében szintén szabályosan viselkedik. Vagyis, ha még kimutatjuk, hogy a

$$\lim_{n=\infty}(S_n-S_{n-1})=0$$

egyenlőség fennáll, akkor FATOU tétele alkalmazható a (30) hatványsorra és így e sor a $z=1$ helyen összetartó. Ez más szóval azt jelenti, hogy az

$$S_0+(S_1-S_0)+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})+\cdots=\lim_{n=\infty}S_n$$

érték létezik, vagyis sorunk tényleg szummábilis a $z=1$ helyen. A

$$\lim_{n=\infty}(S_n-S_{n-1})=0 \tag{31}$$

egyenlőség azonban egyszerűen következik a

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n}{n}=0 \tag{32}$$

egyenlőségből. Ugyanis

$$\begin{aligned}|S_n-S_{n-1}| &= \left|\frac{s_0+\cdots+s_{n-1}+s_n}{n+1}-\frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n}\right|= \\ &= \left|-\frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n(n+1)}+\frac{s_n}{n+1}\right|< \\ &< \frac{|s_0|+\frac{|s_1|}{1}+\cdots+\frac{|s_{n-1}|}{n-1}}{n}+\frac{|s_n|}{n+1}.\end{aligned}$$

Az első mennyiség azonban az

$$|s_0|,\ \frac{|s_1|}{1},\ \frac{|s_2|}{2},\ldots$$

mennyiségeknek számtani közepe s így egy ismeretes tétel alapján látni való, hogy (31) a (32) egyenlőségből csakugyan folyik. Így tehát most már csak a

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$$

egyenlőséget kell igazolnunk.

A

$$\varphi(z) = \sum_1^{\infty} \frac{C_n}{n} z^n = \sum_1^{\infty} c_n z^n = \int_0^z \frac{f(z)-C_0}{z} dz$$

hatványsor szabályossági helyei ugyanazok, mint az $f(z)$ függvényéi, tehát $z=1$ a $\varphi(z)$ függvénynek is szabályossági helye. Másrészt azonban a (28) alatti

$$\lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} \frac{C_n}{n} = 0$$

föltételből FATOU tételének újból való alkalmazásával következik, hogy a $\varphi(z)$ hatványsor a $z=1$ helyen összetartó. Mint tudjuk, minden összetartó sor a számtani közepek módszerének alkalmazásával szummábilis is és a szumma megegyezik a sor összegével.

Legyen

$$\sigma_n = c_0+c_1+\cdots+c_n,$$

akkor a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n} = \lim_{n=\infty} \left(c_0+c_1+\cdots+c_n - \frac{c_1+2c_2+\cdots+nc_n}{n}\right)$$

határérték létezik és az előbb mondottak szerint megegyezik a

$$\lim_{n=\infty} (c_0+c_1+\cdots+c_n)$$

értékkel. Így tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{(c_0+c_1+\cdots+nc_n)}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{(C_0+C_1+\cdots+C_n)}{n} = 0,$$

vagyis (32) tényleg fennáll. Természetesen ez az egyenlőség nemcsak a $z=1$ helyre, hanem az összetartási kör valamennyi szabályossági helyére vonatkozik.

Ha $k>1$, akkor a már jelzett módon $k$-ról $k+1$-re való következtetéssel és a következő segédtétel alkalmazásával mutathatjuk ki állításunkat:

*Ha valamely*

$$C_0+C_1z+C_2z^2+\cdots+C_nz^n\cdots$$

*hatványsorban*

$$\lim_{n=\infty}\frac{C_n}{n^k}=0, \quad (k \text{ pozitiv egész szám}),$$

*akkor az összetartási kör tetszésszerinti szabályossági helyén képezvén a sor* $s_n$ *részletösszegeit,*

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n}{n^k}=0. \tag{33}$$

A

$$\lim_{n=\infty}\frac{C_n}{n^k}=0$$

feltétel egyszersmind szükséges ahhoz, hogy a hatványsor az összetartási körnek legalább egy, a számtani közepek módszerének $k$-szoros alkalmazásával összegezhető legyen. Fennállanak ugyanis a következő tételek:

*Ha egy*

$$c_0+c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$$

*numerikus sor a számtani közepek módszerének k-szoros alkalmazásával szummábilis, akkor e sor* $\sigma_n$ *részletösszegei szükségképen kielégítik a*

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_n}{n^k}=0 \tag{34}$$

*egyenlőséget.* Ebből következik, hogy a

$$\lim_{n=\infty}\frac{c_n}{n^k}=0$$

*egyenlőség is szükséges feltétele a mondott összegezhetőségnek.* a miből előbbi állításunk közvetetlenül folyik. Természetesen a részletösszegek különböző rendű számtani közepeire vonatkozólag is fennáll a (34) alatti összefüggés.

A mondottakból egyszerűen folyik még a következő tétel, melynek egy speciális esetét már e dolgozat elején adtuk. (11. o.)

*Ha valamely*

$$a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots$$

*trigonometrikus sor egy intervallumban a k-adrendű számtani közepek segítségével összegezhető, akkor*

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n^k}=\lim_{n=\infty}\frac{b_n}{n^k}=0. \tag{35}$$

Ebből is kiviláglik, hogy a hatványsorokra vonatkozó tételünkben $\lim\frac{C_n}{n^k}=0$ csakugyan szükséges feltételt képez.

## Összegezés tetszésszerinti valós kitevő esetén.

Mindeddig a vizsgálatainkban szereplő $k$ számról feltettük. hogy pozitiv egész szám, illetőleg, ha nem volt az, helyettesítenünk kellett egy nála nagyobb egész számmal.

A továbbiak egy tetszészerinti valós $k$ számra vonatkoznak, $\frac{1}{n^{i\lambda}}$ abszolut értéke minden valós $\lambda$-ra nézve 1 lévén, komplex kitevők bevezetése nem bír érdekkel. A következő kérdést vethetjük fel: *Értelmezhetünk-e az eddigi eljárásokhoz hasonlóan, egy tetszésszerinti $k$ valós számnak megfelelő összegező eljárást és a megfelelő esetben czélra fog-e ez vezetni?*

Világos, hogy a számtani közép fogalma nem vihető át közvetetlenül. Azonban egy más összegező eljárás, mely a középérték-képezéssel sok tekintetben analógiát mutat, általánosítható lesz.

Legyen adva az

$$a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$$

sor. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$a_0+a_1+\cdots+a_n=S_n^{(0)},$$

$$S_0^{(0)}+S_1^{(0)}+\cdots+S_n^{(0)}=S_n^{(1)}$$

és általánosan

$$S_0^{(\gamma-1)}+S_1^{(\gamma-1)}+\cdots+S_n^{(\gamma-1)}=S_n^{(\gamma)}. \tag{36}$$

Ha még az $S_n^{(0)}$ részletösszegek számtani közepét $s_n^{(1)}$-gyel, ezek számtani közepét $s_n^{(2)}$-vel jelölvén, általánosan alkalmazzuk az

$$s_n^{(\gamma)} = \frac{s_0^{(\gamma-1)} + s_1^{(\gamma-1)} + \dots + s_n^{(\gamma-1)}}{n} \tag{37}$$

jelölést, akkor mint KNOPP[1] kimutatja, a

$$\lim_{n=\infty} s_n^{(\gamma)} \tag{38}$$

*határérték létezéséből mindig következik a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma!}{n^\gamma} S_n^{(\gamma)} \tag{39}$$

*határérték létezése,* (de nem megfordítva). *Ez az érték azután az előbbivel meg is egyezik.*

Világos, hogy az $S_n^{(\gamma)}$ értékek a következő egyenlőséggel is értelmezhetők:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\gamma)} x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{40}$$

$$|x| < 1$$

Ez azt a gondolatot keltheti, hogy ezeket az összegeket tetszésszerinti $\gamma$ értékre nézve is definiáljuk. (A 39-ik oldalon adtunk egy integrálelőállítást, mely az első számtani közép értelmezésére alkalmas. Ennek megfelelő átalakításával képezhetnők az általánosított CESARO-féle összeget is, de ennek kezelése nagyon bonyolult.)

Tetszésszerinti $\gamma$ esetén ugyancsak a fenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\gamma)} x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{41}$$

egyenlőséggel értelmezzük $S_n^{(\gamma)}$-t, a honnan rögtön következik:

$$S_n^{(\gamma)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n-i}^{(\gamma+1)} a_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Gamma(\gamma+n-i+1)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n-i+1)} a_i, \tag{42}$$

a hol $B_i^{(\gamma+1)}$ a megfelelő binomiális együtthatót jelenti.

---

[1] KNOPP: Grenzwerthe von Reihen bei der Annäherung an die Convergenzgrenze. Inauguraldissertation. Berlin, 1907.

KNOPP kimutatja,[1] hogy ha egy tetszésszerinti $\gamma > -1$ értékre nézve

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{n^\gamma} S_n^{(\gamma)} \tag{43}$$

létezik, akkor e határérték ugyancsak létezik minden nagyobb $\gamma$ értékre nézve és az előbbivel megegyezik. Ez a tétel képesít bennünket egy sor határozatlansági fokának pontos értelmezésére. Ha ugyanis egy bizonyos $\gamma > -1$ értékre nézve a fenti határérték létezik, akkor mindig található oly $\gamma_0 \geqq -1$, hogy (43) minden $\gamma > \gamma_0$-ra nézve létezik, és sohasem létezik, ha $-1 \leqq \gamma < \gamma_0$. KNOPP ezt a számot az

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \cdots$$

sor «*Oscillationsgrad*»-jának nevezi és erre vonatkozólag általánosítja CESAROnak egy jól ismert tételét.

Mi most a következő tételt fogjuk kimutatni:

*A*

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_n}{n^k} = 0$$

*egyenlőség szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a*

$$C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots$$

*hatványsor összetartási körének minden szabályossági helyén létezzék a*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{n^k} S_n^{(k)}$$
$$(k \neq -1, -2, \ldots)$$

*határérték.*

Először feltételünk elegendő voltát fogjuk kimutatni. Legyen tehát tényleg adva egy

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_n z^n + \cdots \tag{44}$$

[1] KNOPP: Multiplication divergenter Reihen. Sitzungsberichte der Berl. Math. Gesellsch. 1907. (4. o.) (Archiv der Math. u. Phys. 12. k.)

hatványsor, melyben

$$\lim \frac{C_n}{n^k} = 0.$$ [1]

Tegyük fel egyelőre, hogy

$$k > 0.$$

Azonfölül, minthogy egész szám esetére a tétel már be van bizonyítva, feltehetjük, hogy $k$ nem egész szám és így legyen

$$\mu - 2 < k < \mu - 1, \tag{45}$$

a hol $\mu$ egész számot jelent. Integráljuk a sort tagonkint $\mu$-ször. Az így nyert

$$\Phi(z) = D_0 z^{\mu} + D_1 z^{\mu+1} + \cdots + D_n z^{n+\mu} + \cdots \tag{46}$$

sor együtthatói kielégítik a

$$\lim_{n=\infty} n^{\mu-k} D_n = \lim_{n=\infty} \frac{C_n}{n^k} = 0 \tag{46'}$$

egyenlőséget s minthogy $\mu - k > 1$, tehát ez a sor az összetartási kör kerületén feltétlenül és egyenletesen összetartó. Ebből folyik, hogy a $\Phi(z)$ függvény úgy a kör kerületén, mint pedig a kör belsejében egyenletesen folytonos. Vizsgáljuk meg a két sor értékét egy tetszésszerinti $x$ szabályossági helyen. E helyen a $\Phi$ sor első $n$ tagjából képezett $k$-adrendű összeget $\sigma_n^{(k)}(x)$-szel jelölvén, írhatjuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(k)}(x) z^n = \left(\frac{1}{1-z}\right)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{n+\mu} z^n.$$

Ebből az egyenletből Cauchy integráltételének alkalmazásával egyszerűen következik:

$$\sigma_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(xz)}{z^{\mu}} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{k+1} \frac{1}{z^{n+1}}\, dz, \tag{47}$$

a hol $C$ az összetartási kör kerületét jelenti. Ez az állításunk azonban csak akkor tartható fenn, illetőleg az integrálás csak

---

[1] Ebből világosan következik, hogy a hatványsor az egységkörön belül összetartó. Azonkívül most is felteszszük, hogy ez a kör egyszersmind összetartási köre a hatványsornak.

akkor végezhető akadálytalanul, ha az integrandus véges vagy integrálhatóan végtelen a kerületen. Ezt mindig elérhetjük, ha felteszszük, hogy

$$\Phi(x) = \Phi'(x) = \cdots = \Phi^{(\mu-1)}(x) = 0, \tag{48}$$

a hol mint tudjuk, $\mu-1$ alatt a $k$-t közvetetlenül követő egész számot értjük. Ekkor az integrandus el is tűnik a $z=x$ helyen. A (48) alatti egyenlőségek fennállását azonban mindig biztosíthatjuk egy legfeljebb $\mu-1$-edrendű polinóm levonásával. Könnyű kimutatni erre az összegezési eljárásra vonatkozólag is, hogy a kezdőtagok megváltoztatásával az összegezhetőség fenmarad és a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{n^k} S_n^{(k)}$$
$$(k \neq -1, -2, \ldots)$$

érték épen úgy változik meg, mintha a sor összetartó volna, avagy végesszámú tagból állana. Csekély átalakítással nyerhetjük még:

$$\sigma_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Phi(z)}{z^{n+\mu+1}} \left(\frac{1}{x-z}\right)^{k+1} x^{n+k+\mu+1}\, dz. \tag{49}$$

Az $F(x)$ sor első $n$ tagjából képezett $k$-adrendű összeg lesz:

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{\Phi(z)}{z^{n+\mu+1}} \frac{d^\mu}{dx^\mu} \left[\left(\frac{1}{x-z}\right)^{k+1} x^{n+k+\mu+1}\right] dz, \tag{50}$$

a hol a $C'$ görbét úgy nyerjük, hogy az $x$ pont körül tetszésszerinti kis sugárral egy $c$ kört irunk le, mely a $C$ kör egy ívét tartalmazza. Ezt az ívet elhagyván, a $C$ kör megmaradt része és a $c$ körnek a $C$ kör belsejében vonuló íve alkotják a $C'$ görbét. Felteszszük még, hogy

$$\Phi^{(\mu)}(x) = \cdots = \Phi^{(2\mu-1)}(x) = 0. \tag{51}$$

Ki fogjuk mutatni, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^k} S_n^{(k)}(x) = 0. \tag{52}$$

Végezzük el a differencziálást és azután a további számítások egyszerűsítésére tegyük fel, hogy

$$x = 1$$

és így természetesen (48) és (51) szerint

$$\Phi(1) = \Phi'(1) = \cdots = \Phi^{(2\mu-1)}(1) = 0. \tag{53}$$

A differencziálásból nyert mennyiség lesz:

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu} A_\lambda \left(\frac{1}{1-z}\right)^{k+1+\lambda}, \tag{54}$$

a hol az $A_\lambda$ számbeli együtthatók olyanok, hogy az

$$\frac{A_\lambda}{n^\mu} \tag{55}$$

mennyiség véges határok között mozog. Ha tehát egy tetszésszerinti $0 \leqq \lambda \leqq \mu$ egész számra nézve kimutatjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^k} \int_C n^\mu \frac{\Phi(z)}{z^{n+\mu+1}} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{k+1+\lambda} dz =$$

$$= \lim_{n=\infty} n^{\mu-k} \int_C \frac{\Phi(z)}{z^{n+\mu+1}} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{k+1+\lambda} dz = 0, \tag{56}$$

akkor, minthogy $\lambda$ véges számú értéket vehet csak föl, egyúttal (52) is be lesz bizonyítva.[1]

Legyen

$$k+1+\lambda = \nu, \tag{57}$$

akkor

$$\nu < 2\mu. \tag{58}$$

A $z=1$ pontnak mindenesetre van olyan környezete a kerületen, melyben a $\Phi(z)$ függvény még szabályos. Jelentsék $z_1$ és $z_2$ e környezet két oly helyét, hogy pozitiv körüljárásnál a három pont sorrendje $z_1$, 1 és $z_2$ legyen. Azt a $z_1 z_2$ ívet, mely az 1 helyet tartalmazza, $C_1$-gyel, a megmaradt $z_2 z_1$ ívet pedig $C_2$-vel jelöljük.

[1] Ugyanis (53) alapján a $C'$ menti integrálás helyettesíthető a $C$ menti integrálással.

Meghatározunk olyan (általában 5-ödrendű) polinómot, hogy úgy a

$$H(z)=\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\nu}-P(z) \tag{59}$$

mennyiség, mint pedig első és második differencziálhányadosai a $z_1$ és $z_2$ helyen eltűnjenek.[1]

(46) szerint

$$\Phi(z)=D_0 z^{\mu}+\cdots+D_n z^{n+\mu}+\cdots$$

és (46') szerint

$$\lim_{n=\infty} n^{\mu-k} D_n=0,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} n^{\mu-k}\int\limits_{C}\frac{\Phi(z)}{z^{n+\mu+1}}P(z)\,dz=0, \tag{60}$$

mert hiszen az integrál a már alkalmazott CAUCHY-féle tétel szerint a $\frac{\Phi(z)}{z^{\mu}}P(z)$ hatványsor együtthatóit adja (egy állandó tényezőtől eltekintve).

Másrészt a

$$\mu-2<k<\mu-1$$

egyenlőtlenségből következik a

$$\mu-k<2 \tag{61}$$

egyenlőtlenség, viszont (59) alapján parcziális integrálás segítségével könnyen kimutatható, hogy

$$\lim_{n=\infty} n^2\int\limits_{C_2}\left[\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\nu}-P(z)\right]\frac{1}{z^{n+\mu+1}}\,dz=0 \tag{62}$$

s így annál inkább fennáll ez, ha 2 helyébe kitevőül $\mu-k$-t teszünk.

Alkalmazzuk most azokat a képleteket, melyek két függvény FOURIER-sorainak együtthatóiból megadják a szorzat FOURIER-féle együtthatóit.

---

[1] Többértékű függvényünknek például a $z_1$ helyen meghatározott értéket adunk és azután a függvényt a kör mentén folytatjuk.

Ha $f(x)$ FOURIER-sora

$$\tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px),$$

$\varphi(x)$-é

$$\tfrac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p \cos px + \beta_p \sin px),$$

szorzatuké $F(x)$-é pedig

$$\tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_p \cos px + B_p \sin px),$$

akkor, ha még az $a_{-k} = a_k$, $b_{-k} = -b_k$ jelöléseket bevezetjük,

$$\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \tfrac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \alpha_p + b_p \beta_p), \\ A_n &= \tfrac{1}{2} a_0 \alpha_n + \tfrac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [a_p (\alpha_{p+n} + \alpha_{p-n}) + b_p (\beta_{p+n} + \beta_{p-n})], \qquad (63) \\ B_n &= \tfrac{1}{2} a_0 \beta_n + \tfrac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} [a_p (\beta_{p+n} - \beta_{p-n}) - b_p (\alpha_{p+n} - \alpha_{p-n})]. \end{aligned}$$

Ezek az egyenlőségek, melyek teljesen általános érvényűek,[1] a mi esetünkben nagyon egyszerűen igazolhatók. Ugyanis a mi alkalmazásainkban szereplő sorok feltétlenül és egyenletesen összetartók.

Ki fogjuk most mutatni, hogy, ha a

$$\lim_{n=\infty} n^s a_n = \lim_{n=\infty} n^s b_n = 0 \qquad (64)$$

és

$$\lim_{n=\infty} n^s \alpha_n = \lim_{n=\infty} n^s \beta_n = 0$$
$$(s>1)$$

egyenlőségek fennállanak, akkor egyszersmind a szorzat együtthatóira nézve

$$\lim_{n=\infty} n^s A_n = \lim_{n=\infty} n^s B_n = 0. \qquad (65)$$

Elég például megmutatni, hogy

$$\lim_{n=\infty} n^s \sum_{p=1}^{\infty} a_p (\alpha_{p+n} + \alpha_{p-n}) = 0.$$

---

[1] HURWITZ, LEBESGUE, FATOU l. c.

Legyen

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_p| = M_1$$

és

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\alpha_p| = M_2.$$

Jelöljön $n_0$ egy oly számot, hogy

$$n^s |a_n| < \varepsilon$$

és

$$n^s |\alpha_n| < \varepsilon, \tag{66}$$

ha

$$n > n_0.$$

Közvetetlenül világos, hogy, ha

$$2n+1 \geqq N \geqq 2n,$$

akkor

$$N^s \sum_{p=1}^{\infty} |a_p| \, |\alpha_{p+N}| < \varepsilon M_1,$$

másrészt

$$|N^s \sum_{p=1}^{\infty} a_p \alpha_{p-N}| < |N^s \sum_{p=1}^{n} a_p \alpha_{p-N}| + |N^s \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p \alpha_{p-N}| <$$
$$< 2^s \varepsilon M_1 + 2^{s+1} \varepsilon M_2.$$

Látni való tehát, hogy (65) csakugyan fennáll.

A most mondottakból azután egyszerűen folyik a következő tétel, mely egy RIEMANN-féle tételnek általánosítása:

*Legyen adva egy $f(x)$ függvény, melynek* FOURIER-*sora kielégíti a* (64) *alatti feltételt és egy $\varphi(x)$ függvény, melyre nézve*

$$\lim_{n=\infty} n^s \int_a^b \varphi(x) \cos nx dx = 0$$

és

$$\lim_{n=\infty} n^s \int_a^b \varphi(x) \sin nx dx = 0, \tag{67}$$
$$(s>1)$$

*a hol a és b két meghatározott számot jelentenek. Akkor egyúttal*

$$\lim_{n=\infty} n^s \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\cos nx dx = 0 \tag{68}$$

és

$$\lim_{n=\infty} n^s \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\sin nx dx = 0. \tag{69}$$

Ezek után visszatérhetünk a

$$\lim_{n=\infty} n^{\mu-k} \int_{C_2} \Phi(z)\left[\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\nu} - P(z)\right]\frac{1}{z^{n+\mu+1}}\,dz \tag{70}$$

integrál vizsgálására. Ha az integráljel alatti mennyiséget valós és képzetes részre bontjuk és a (46) és (62) alatti egyenlőségeket összevetjük az imént levezetett tétellel, akkor közvetetlenül nyerjük, hogy a (70) alatti mennyiség határértéke zérus.[1]

A $C_1$ menti integrálásnál 2-szeres parcziális integrálást alkalmazunk. Világos (59)-ből, hogy a totálisan integrált részek elesnek. A parcziális integráczió kivihető lesz az összes

$$\mu-1 \leqq \nu = k+\lambda+1 \leqq 2\mu$$

értékekre nézve, ha (53) mellett még felteszszük, hogy

$$\Phi^{(2\mu)}(1) = \Phi^{(2\mu+1)}(1) = 0. \tag{71}$$

A parcziális integráczió után az integrál jel előtt az

$$\frac{n^{\mu-k}}{(n+\mu)(n+\mu-1)}$$

tényező áll, melynek határértéke a $\mu-k<2$ egyenlőtlenség alapján, $n=\infty$ esetére zérus. Viszont az $\frac{1}{z^{n+\mu-1}}$-gyel szor-

---

[1] A bebizonyításban azt is ki kell használnunk, hogy

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\nu} - P(z)$$

úgy valós, mint pedig képzetes része bír a (67)-ben szereplő $\varphi$ függvény tulajdonságaival, ha $s$ alatt a jelen esetben $\mu-k$-t értünk.

zott kifejezés véges és így RIEMANN egy klasszikus tétele értelmében

$$\lim_{n=\infty} n^{\mu-k}\int_{C_1}\Phi(z)\left[\left(\frac{1}{1-z}\right)^{\nu}-P(z)\right]\frac{1}{z^{n+\mu+1}}\,dz=0. \qquad (72)$$

Ez az egyenlőség tehát az egész kör menti integrálásnál is fennáll s így (60) tekintetbe vételével végre kimutattuk, hogy a

$$\lim_{n=\infty}\frac{C_n}{n^k}=0$$

feltétel teljesültével a

$$C_0+C_1z+\cdots+C_nz^n+\cdots$$

hatványsor $z=1$ szabályossági helyén a

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(k+1)}{n^k}S_n^k$$

határérték létezik és természetesen meg is adja a függvény értékét.

Bebizonyításunkban feltettük, hogy $k>0$. Látni való, hogy ez a megszorítás nem lényeges és *az alkalmazott eljárással minden $k$ számra* ($\neq -1, -2, \ldots$) *nézve kimutathatjuk a fenti határérték létezését, ha csak a*

$$\lim_{n=\infty}\frac{C_n}{n^k}=0$$

*feltétel teljesítve van.* Ez által FATOU tételét speciális esetként nyerjük. Ha viszont ebből a tételből akarnók az általánosat levezetni, akkor a RIEMANN-LIOUVILLE-féle általánosított differencziálhányadosokra[1] vonatkozó érdekes eredményeket kapnánk. Ennek részletezésével azonban most nem foglalkozhatunk.

Mondottuk, hogy a $\lim\limits_{n=\infty}\frac{C_n}{n^k}=0$ *feltétel szükséges* is ahhoz, hogy a hatványsor az összetartási körnek legalább egy he-

[1] Ezek a mennyiségek a $k$-adrendű differencziálhányadost nem egész számú $k$ esetére is értelmezik.

lyén a jellemzett eljárással összegezhető legyen. Ez az állításunk az alkalmazott eljárás megfordításával egyszerűen igazolható.

Knopp egy érdekes tételéből[1] még az is következik, hogy, ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^k} = 0 \quad \text{és} \quad k > 1,$$

akkor egyszersmind ebben az esetben is minden szabályossági helyen a sor részletösszegei kielégítik a

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^k} = 0$$

egyenlőséget.

E vizsgálatok befejezte után Knopp disszertácziója révén lettem figyelmessé Hadamard[2] néhány eredményére, melyek az itt nyertekhez sokban hasonlítanak. Ő ugyanis «thèse»-ében az összetartási körön fekvő egyes szinguláris helyek természetét vizsgálván, bevezeti a hatványsor *rend*jének (ordre) a fogalmát. E fontos fogalmat először a már említett Riemann-Liouville-féle általánosított differencziálhányadosok segítségével értelmezi, a miből azután mély meggondolásokkal kapja, hogy az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

*hatványsor rendje az összetartási körön* mindig

$$\omega = 1 + \limsup_{n=\infty} \frac{\log |a_n|}{\log n} \cdot \tag{73}$$

Ezek után a következő tételt mondja ki:[3]

*Legyen adva egy hatványsor, melynek rendje $\omega$ véges és jelöljön $\omega' > 0$ egy $\omega$-nál nagyobb (és vele nem egyenlő) számot; legyen továbbá $x$ az összetartási kör egy szabályossági helye, akkor*

---

[1] Knopp: Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung. Rend. Circ. Math. Palermo. 25. k. (1908).

[2] Hadamard: Essai sur l'étude des fonctions par leur développement de Taylor. *Thèse.* Journal de Math. 1902. (182. o.)

[3] La série de Taylor et son prolongement analytique. (Scientia. Paris, 1901.) (47. és 52. o.)

$$f(x)=\lim_{n=\infty}\frac{a_0B_n^{(\omega')}+a_1B_{n-1}^{(\omega')}x+\cdots+a_nx^n}{B_n^{(\omega')}}, \tag{74}$$

*a hol* $B_n^{(\omega')}$ *az* $(1-x)^{-\omega'}$ *sorbafejtésében szereplő binomiális együtthatók közül* $x^n$ *együtthatója.*

*Viszont a fenti határérték csak akkor létezik minden szabályossági helyen, ha* $\omega'>\omega$.

A (74) alatti határérték lényegileg megegyezik az eddigiek folyamán sokszor használt

$$\lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(\omega')}{n^{\omega'-1}}S_n^{(\omega'-1)} \tag{75}$$

határértékekkel. Ugyanis (74)-ben a limes-jel alatt szereplő mennyiség egyenlő

$$\frac{1}{B^{(\omega')}}\frac{n^{\omega'-1}}{\Gamma(\omega')}\left[\frac{\Gamma(\omega')}{n^{\omega'-1}}S_n^{(\omega'-1)}\right]$$

-gyel.

Azonban

$$\lim_{n=\infty}\frac{n^{\omega'-1}}{B_n^{(\omega')}.\,\Gamma(\omega')}=1, \tag{76}$$

kivévén az $\omega'=0,\ -1,\ -2,\ldots$ helyeket, a mikor e kifejezés határozatlan. Ez az egyenlőség ugyanis egyszerűen folyik a $\Gamma$ függvény szorzat-előállításából.

Így tehát a két határérték valamelyikének a létezéséből a másiknak a létezése is következik és a két érték mindig megegyezik.

Ebből azonban nyilván való, hogy HADAMARD téved a szükséges feltétel megadásában és nézetem szerint az általa használt. különben nagyon szép módszer nem is alkalmas ilyen feltétel szolgáltatására.

Mi ugyanis kimutattuk, hogy a

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n^{\omega'-1}}=0 \tag{77}$$

egyenlőség a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az HADAMARD-tól eredő (74) alatti határérték az összetartási kör minden szabályossági helyén létezzék. Ez pedig nem egyezik meg minden esetben HADAMARD feltételeivel. Ha ugyanis az $a_n$ együtthatók ilyen alakúak:

$$a_n = \frac{n^k}{\varphi(n)},$$

a hol $\varphi(n)$ abszolut értéke $n$ növekedtével minden határon túl nő ugyan, de

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\varepsilon} = 0,$$

bármilyen kis pozitiv számot jelentsen is $\varepsilon$, akkor az

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

hatványsor rendje természetesen

$$\omega = k+1.$$

HADAMARD tétele szerint az $\omega - 1 = k$-adrendű összegezés még nem vezet czélra, míg a mi eredményeink szerint ez az eljárás az összetartási kör minden szabályossági helyén megadja a függvény értékét.

Így például HADAMARD feltétele szerint a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$$

sor (rendje 1), nem lehet összetartó és a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n x^n}{\log n}$$

sor (rendje 2), nem lehet egyszeri számtani középérték-képezéssel összegezhető az egységkör szabályossági helyein, holott FATOU tétele és a mi eredményeink szerint e sorok bírnak ezekkel a tulajdonságokkal.

Figyelemreméltó még, hogy szummáló eljárásunkkal akkor is czélt érünk, ha $k$ negativ (nem egész) szám.

Így például a

$$\sum_{(\sigma>0)} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

sornál a

$$\frac{\Gamma(-k+1)}{n^{-k}} S_n^{(-k)} \qquad (0<k<\alpha) \tag{78}$$

összegek a szabályossági helyeken jelentékenyen erősebben oszczillálnak, mint a sor részletösszegei. Azonban (78) határértéke mégis létezik.

Látni való még, hogy eddigi vizsgálatainkban nem szükséges, hogy az illető hely szabályossági hely legyen. *Elegendő például, ha ezen a helyen és környezetében létezik a hatványsor kerületi függvényének bizonyos számú (az ív szerint vett) deriváltja. Más helyen kimutattam, hogy ez a föltétel is lényegesen általánosítható.*

## Alkalmazás a trigonometrikus sorokra.

Eredményeink egyszerű módszert szolgáltatnak olyan trigonometrikus sorok képzésére, melyeknek együtthatói végtelen nagyok lesznek és a melyek ennek daczára Fejér eljárása szerint mindenütt szummábilisek. Ilyen sorok eddig nem voltak ismeretesek. (Megjegyezzük azonban, hogy más módon is nyerhetünk analog természetű sorokat.)

Ugyanis például a reziduum-számításnak Lindelöf által tökéletesített módszereivel[1] egyszerűen igazolható, hogy a már említett

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{\log n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nz^n}{\log n}$$

sorokaknak egyetlen szinguláris helye az egységkörön $z=1$. Így tehát az utóbbiból képezett:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin n\varphi}{\log n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \cos n\varphi}{\log n}$$

[1] Lindelöf: Calcul des résidus etc. (Gauthier-Villars. Paris, 1905). L. pl. 109. o.

sorok közül az első kivétel nélkül, a második a $\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ helyek kivételével FEJÉR módszerével szummábilis.

Hasonló tulajdonságúak például a

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\nu} \sin n\varphi \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{\nu} \cos n\varphi$$
$$(0 \leqq \nu < 1)$$

sorok.

Megjegyezzük, hogy a mindenütt szummábilis

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \sin n\varphi}{\log n} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{\nu} \sin n\varphi$$
$$(0 \leqq \nu < 1)$$

sorok által ábrázolt függvények egyike sem határolt, a mi legalább a másodikra vonatkozólag a dolgozatunk folyamán bebizonyított (általánosított) DU BOIS-REYMOND-féle tételből is következik.

*Riesz Marczell.*

# ELEKTROSZTATIKAI EGYENSÚLY KÖRGYŰRŰN.

## Bevezetés.

C. Neumann: «Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe» czímű munkájában annak a kérdésnek megoldásával foglalkozik, hogy ha egy körgyűrűalakú vezetővel bizonyos elektromos töltést közlünk, miképen oszlik el az elektromosság a gyűrű felületén, hogy ha azt semmiféle külső hatás nem éri, vagyis mekkora az elektromosság sűrűsége a gyűrű felületének minden egyes pontjában. Fejtegetései végén megjegyzi, hogy eljárása általánosabb esetre is alkalmazható, a nélkül, hogy ennek részletezésébe bocsátkoznék. A jelen dolgozatban kimutatjuk, hogy Neumann módszerével az elektromosság eloszlása körgyűrűn egész általánosan meghatározható az esetben is, ha a vezető tetszőleges külső erők hatása alatt áll.

Kitüzött feladatunkat két részben fogjuk megoldani. Előbb azon esetet tárgyaljuk, *miképen helyezkedik el a megosztott elektromosság egy gyűrűalakú vezető felületén, tetszőleges külső elektromos erők hatása alatt, feltéve, hogy a gyűrűnek eredetileg nincs töltése.* Azután rátérünk azon általános, úgy az előbbit, mint a Neumann-félét magában foglaló probléma tárgyalására: *meghatározandó az elektromosság eloszlása az esetben, ha a gyűrűalakú vezetőnek szabad töltése van s azonfelül tetszőleges külső elektromos erők hatása alatt áll.*

Neumann a probléma megoldásához a körgyűrűre külön alkalmas koordináta-rendszert vezetett be, az ú. n. gyűrűkoordinátákat, melyben a potencziál s az arra vonatkozó egyenletek s egyéb, itt felmerülő mennyiségek aránylag egyszerű s a tárgyalásra alkalmas kifejezést nyernek. A fellépő mennyiségeket egy tényezőtől eltekintve, kettős trigonometrikus sorokba fejti ki, melyeknek együtthatói bizonyos, általánosabb értelemben vett gömbfüggvények.

Mielőtt tehát a probléma tárgyalásába fognánk, előre kell bocsátanom néhány, a gömbfüggvényekre vonatkozó tételt, melyekre a tárgyalás folyamán szükségünk lesz, s az alkalmazott NEUMANN-féle koordináta-rendszert, valamint egyenleteinknek ezen koordináta-rendszerre vonatkozó alakjait. Végül ismertetni fogom NEUMANN problémájának megoldását, mivel, mint említettem, ennek általánosabb esetre való alkalmazása fogja képezni e dolgozat tárgyát.

A gyűrű-koordinátákat, valamint az itt előforduló gömbfüggvényeket nem az eredeti NEUMANN-féle alakban használom, hanem abban, az eredetitől lényegesen nem különböző, csak némileg egyszerűbb formában, melyben azokat E. HEINE «Handbuch der Kugelfunctionen» czímű munkájában tárgyalja.

## Irodalom.

Itt közlöm a «Fortschritte der Physik» czímü évkönyvek alapján mindazokat az értekezéseket, melyek NEUMANN óta a körgyűrűre vonatkozó elektrosztatikai problémákkal foglalkoztak.

C. NEUMANN : Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe. Halle, 1864. Alább bővebben ismertetem.

F. W. DYSON : The potential of an anchor ring. Phil. Trans. A. 184, 1893. Gyűrű potencziálját tárgyalja a tér különböző pontjaiban és különböző hidrodinamikai problémákra alkalmazza.

N. BULGAKOW : Zur Frage der Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche eines ringförmigen Conductors, dessen meridionaler Schnitt ein Kreis ist. Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 29, 131, 1897. A NEUMANN által megoldott problémát tárgyalja NEUMANN segédeszközeivel, eljárása utóbbiétól csak annyiban különbözik, hogy a $\Delta V = 0$ egyenlet számára partikuláris megoldásokat állít fel, s ezekből a sűrűséget a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right)$$

kifejezés alapján határozza meg.

N. Bulgakow: Aequipotentialflächen im Felde eines elektrisierten Ringes. Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 30, 104, 1898. Ugyanezen folyóirat ugyanezen évfolyamában több értekezést írt a gyűrűalakú vezetők kapaczitásáról és annak méréséről.

## I. A gömbfüggvények.[1]

A legegyszerűbb gömbfüggvényekhez két pont egymástól való távolsága reczíprok értékének sorbafejtésénél jutunk. Legyen $P(x, y, z)$ és $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a tér két tetszőleges pontja és jelöljük a $\overline{PP_1} = R$ távolság reczíprok értékét röviden $T$-vel, tehát $T = \frac{1}{R}$, akkor

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Fejezzük ki $P$ és $P_1$ koordinátáit gömbkoordinátákban:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta, & x_1 &= r_1\cos\vartheta_1, \\ y &= r\sin\vartheta\cos\psi, & y_1 &= r_1\sin\vartheta_1\cos\psi_1, \\ z &= r\sin\vartheta\sin\psi, & z_1 &= r_1\sin\vartheta_1\sin\psi_1, \end{aligned}$$

akkor

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = r^2-2rr_1\cos\gamma+r_1^2,$$

hol

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\psi-\psi_1), \tag{1}$$

és $\gamma$ nem egyéb, mint az $\overline{OP}$ és $\overline{OP_1}$ távolságok által bezárt szög ($O$ a koordinátarendszer kezdőpontja). Tehát

$$T = \frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_1\cos\gamma+r_1^2}}.$$

---

[1] L. Heine: Handbuch der Kugelfunctionen, 2. kiadás. I—II. kötet (1878—1881).

Legyen $r<r_1$ és írjuk $T$-t ily alakban:

$$T=\frac{1}{r_1}\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r}{r_1}\right)\cos\gamma+\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}.$$

Ha a $P_1$ pontot állandónak s a $P$-t változónak tekintjük, akkor ez lényegében ily alakú kifejezés, melyet röviden szintén $T$-vel jelölhetünk:

$$T=\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-a(2x-a)}}, \tag{2}$$

hol $a$ és $x$ az egységnél kisebb valós számok. Akkor $a(2x-a)$ is $<1$, s így $T$ a binomiális tétel értelmében kifejthető $a(2x-a)$ hatványai szerint; ezt még $a$ hatványai szerint rendezve

$$T=1+xa+\frac{1.3}{1.2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)a^2+\frac{1.3.5}{1.2.3}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)a^3+\cdots$$
$$+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\cdots\right]a^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a^nP^n(x).$$

Az itt fellépő $P$ együtthatókat nevezik gömbfüggvényeknek, még pedig $a^n$ együtthatóját, $P^n(x)$-et *n-edik* vagy $n$-edfokú, s *elsőfajú gömbfüggvénynek.*

Kiindulásunkban feltettük, hogy $x$ az egységnél kisebb valós szám. Azonban a $P^n(x)$ függvénynek az 1-nél nagyobb, vagy komplex $x$ esetén is van meghatározott értéke, s azért a $P^n(x)$ gömbfüggvényt a

$$P^n(x)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\cdots\right] \tag{3}$$

egyenlettel definiálják bármely valós vagy komplex $x$ esetén. $n$ pozitiv egész szám, tehát $P^n(x)$ az $x$-nek $n$-edfokú raczionális egész függvénye. A gömbfüggvények egyéb $n$ esetére is általánosíthatók.

A $P^n(x)$ függvény egy differencziálegyenletnek tesz eleget, melyet a $T$ kifejezésből könnyen nyerhetünk, s a mely a következő:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0. \tag{4}$$

Ezt a gömbfüggvények differencziálegyenletének nevezik.

A (4) differencziálegyenletnek a $P^n(x)$ függvényen kívül van még egy másik partikuláris megoldása, mely a következő

$$Q^n(x)=\frac{1.2.3\ldots n}{3.5.7\ldots(2n+1)}\left[x^{-n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)}x^{-n-3}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)}x^{-n-5}+\cdots\right], \tag{5}$$

mint arról behelyettesítéssel is meggyőződhetünk, s ezért az (5) egyenlettel definiált $Q^n(x)$ függvényt is gömbfüggvénynek, még pedig *másodfajú gömbfüggvény*nek nevezik. Tehát a differencziálegyenlet teljes megoldása $y=aP^n(x)+bQ^n(x)$, hol $a$ és $b$ állandók.

Az (5) egyenlet szerint a $Q^n(x)$ függvénynek csak addig van értelme, míg $|x|>1$. Továbbá eddig úgy a $P^n(x)$, mint a $Q^n(x)$ et értelmező egyenletekben feltettük, hogy $n$ pozitiv egész szám. Azonban mind a két gömbfüggvény általánosítható e tekintetben is úgy, hogy a mellett a (4) differencziálegyenletnek eleget tegyenek. A gömbfüggvények általánosítása már azért is kivánatos, mert számos vizsgálatnál és sorbafejtésnél oly függvények lépnek fel, melyek ott hasonló szerepet visznek, mint a gömbfüggvények, s azokkal főbb tulajdonságaikban megegyeznek.

Ez az általánosítás két úton is lehetséges. Az egyik eljárás az, hogy a (4) differencziálegyenletet sorokkal integráljuk. A $P^n(x)$ és $Q^n(x)$ függvények hipergeometrikus sorral fejezhetők ki. Ugyanis jelöljük a hipergeometrikus sort következőkép

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

akkor, mint a (3) és (5) egyenletekből közvetlenül belátható,

$$P^n(x) = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} x^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}-n, \frac{1}{x^2}\right), \tag{6}$$

$$Q^n(x) = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2n+1)} x^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{3}{2}+n, \frac{1}{x^2}\right). \tag{7}$$

A (4) differencziálegyenlet integrálja minden esetben előállitható hipergeometrikus sorral. S mivel a $P^n(x)$ és $Q^n(x)$ függvények is nem egyebek, mint speczialis hipergeometrikus sorok, melyek számos tulajdonságukat az esetben is megtartják, ha $n$ tetszésszerinti valós vagy komplex szám, azért a (4) differencziálegyenlet integrálját bármely $n$ esetén gömbfüggvénynek nevezik.

A gömbfüggvények általánositása a következő úton is lehetséges, mely tárgyalásaink szempontjából igen fontos. Mind a két, $P^n(x)$ és $Q^n(x)$ gömbfüggvény előállitható határozott integrál alakjában, mely tetszőleges $n$ esetén is megtartja érvényességét.

A következőkben csak röviden hivatkozni fogok az eredményekre és tételekre, melyekre a tárgyalás folyamán szükségünk lesz, mivel részletezésük hosszadalmas volna.

A $P^n(x)$ függvény bármely $x$ értékre, melyben a valós rész pozitiv, a következő két integrállal fejezhető ki:

$$P^n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + \cos\varphi \sqrt{x^2-1})^n d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x + \cos\varphi \sqrt{x^2-1})^{n+1}}. \tag{8}$$

(Heine: Handbuch der Kugelfunctionen, I. k. 36—37. l.)

Az $x + \cos\varphi \sqrt{x^2-1}$ kifejezést az $x - \cos\varphi \sqrt{x^2-1}$ kifejezéssel is felcserélhetjük. Hasonlóan minden $x$ értékre, melynek valós része pozitiv és a mely nem a $+1$ és $-1$ pólusok közti valós szám,

$$Q^n(x) = \int_0^\infty \frac{du}{(x+\cos iu\sqrt{x^2-1})^{n+1}} = \int_0^{v_0} (x-\cos iv\sqrt{x^2-1})^n dv, \quad (9)$$

hol

$$v_0 = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}.$$

(HEINE l. c. I. k. 132. és 161. l.). Mindkét egyenletben a jobboldali integrálok akkor is meghatározott függvényeket tüntetnek elő, érvényesek s a gömbfüggvények (4) alatti differencziálegyenletét kielégitik, ha $n$ tört vagy bármiféle más szám. Azért az ilyen alakú integrálokat az esetben is gömbfüggvényeknek tekinthetjük, ha $n$ nem pozitiv egész szám.

Az eddig megismerteken kivül foglalkoznunk kell a gömbfüggvényeknek még egy csoportjával, a két indexű vagy ú. n. adjungált gömbfüggvényekkel. Mint a $P^n$-et, úgy ezeknek is egy osztályát sorbafejtéssel származtathatjuk. Azonban egyszerűbb lesz F. NEUMANN-nak következő módszerét követni,[1] mely ezeknek az előbbiekkel való összefüggésére is fényt derít.

Ha a gömbfüggvények (4) alatti differencziálegyenletét $x$ szerint $\nu$-ször differencziáljuk, kapjuk, hogy

$$(1-x^2)\frac{d^{\nu+2}y}{dx^{\nu+2}} - 2(\nu+1)x\frac{d^{\nu+1}y}{dx^{\nu+1}} + (n-\nu)(n+\nu+1)\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = 0,$$

vagy másképp

$$(1-x^2)\frac{d^2y^{(\nu)}}{dx^2} - 2(\nu+1)x\frac{dy^{(\nu)}}{dx} + (n-\nu)(n+\nu+1)y^{(\nu)} = 0, \quad (10)$$

hol

$$y^{(\nu)} = \frac{d^\nu y}{dx^\nu}.$$

---

[1] F. NEUMANN: Vorlesungen über Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen.

A (4) differencziálegyenlet megoldásából (7. lap) világos, hogy ennek általános megoldása

$$y^{(\nu)} = \alpha \frac{d^\nu P^n(x)}{dx^\nu} + \beta \frac{d^\nu Q^n(x)}{dx^\nu},$$

hol $\alpha$, $\beta$ állandók.

Legyen

$$y^{(\nu)} = (x^2-1)^{-\frac{\nu}{2}} z,$$

vagyis

$$z = (x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} y^{(\nu)},$$

akkor $z$-re (10)-ből a következő differencziálegyenletet kapjuk:

$$(1-x^2)^2 \frac{d^2z}{dx^2} - 2x(1-x^2) \frac{dz}{dx} + [n(n+1)(1-x^2)-\nu^2] z = 0. \quad (11)$$

Ennek megoldása az előbbiek szerint

$$z = (x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} y^{(\nu)}$$

$$= \alpha(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu P^n(x)}{dx^\nu} + \beta (x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu Q^n(x)}{dx^\nu}.$$

Az itt fellépő függvényeket:

$$(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu P^n(x)}{dx^\nu} \quad \text{és} \quad (x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu Q^n(x)}{dx^\nu}$$

esetleg szorozva egy állandó faktorral, nevezik *adjungált* vagy hozzárendelt *gömbfüggvényeknek*. Jelöljük ezeket $P^n_\nu(x)$ és $Q^n_\nu(x)$-el, akkor HEINE után

$$P^n_\nu(x) = \frac{\Pi(n-\nu)}{1.3\ldots(2n-1)} (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu P^n(x)}{dx^\nu},$$

$$Q^n_\nu(x) = (-1)^\nu \frac{1.3\ldots(2n+1)}{\Pi(n+\nu)} (1-x^2)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^\nu Q^n(x)}{dx^\nu},[1]$$

---

[1] HEINE ezeket a kifejezéseket tulajdonképen $P^n_{-\nu}(x)$ és $Q^n_{-\nu}(x)$-el jelöli, míg $P^n_\nu(x)$ és $Q^n_\nu(x)$-el a következőket:

hol

$$\Pi m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (m-1)\, m.$$

A továbbiakban az $n$ nem egész számú értékeket is fog felvenni, s ez esetre a $\Pi$ függvényt a $\Gamma$ függvénynyel értelmezzük, mely egész számú $m$ esetén a $\Pi m$-et adja:

$$\Gamma(m+1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (m-1)\, m = \Pi m,$$

de mi nem egész számú $m$ esetén is, HEINE jelölését megtartva, $\Pi m$-el fogjuk jelölni.

Az elsőnek csak addig van értelme, míg $\nu \leqq n$, mert $P^n$ az $x$-nek $n$-edfokú egész függvénye. $P^n_\nu(x)$ az elsőfajú, $Q^n_\nu(x)$ a másodfajú adjungált gömbfüggvény.

Az adjungált gömbfüggvények differencziálegyenlete a (11) alatti

$$(1-x^2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + [n(n+1)(1-x^2)-\nu^2]\, y = 0, \quad (12)$$

melynek általános megoldása

$$y = \alpha P^n_\nu(x) + \beta Q^n_\nu(x), \quad (13)$$

hol $\alpha$, $\beta$ állandók.

Az eddigiek szerint a $P^n_\nu$ és $Q^n_\nu$ függvényeknek csak addig van értelmük, míg $n$ és $\nu$ egész szám. Azonban a hozzárendelt függvények is általánosíthatók tetszőleges $n$ és $\nu$-re. Ez az általánosítás itt is ugyanazzal a két eljárással lehetséges, mint a $P^n$ és $Q^n$ gömbfüggvényeknél. Az egyik, hogy a (12) differencziálegyenletet hipergeometrikus sorokkal integráljuk, melyek azon speciális esetben, ha $n$ és $\nu$ egész szám, a fenti $P^n_\nu$ és $Q^n_\nu$ függvényekkel egyeznek meg. A másik, hogy

---

$$P^n_\nu(x) = \frac{\Pi(n+\nu)}{1.3\ldots(2n-1)}(x^2-1)^{-\frac{\nu}{2}} \int_{-1} P^n(x)\, dx^\nu,$$

$$Q^n_\nu(x) = \frac{1.3\ldots(2n+1)}{\Pi(n-\nu)}(x^2-1)^{-\frac{\nu}{2}} \int_x^\infty Q^n(x)\, dx^\nu,$$

azonban $P^n_{-\nu}(x) = P^n_\nu(x)$ és $Q^n_{-\nu}(x) = Q^n_\nu(x)$, s mivel ezek részletezésére úgy sincs szükségünk, azért egyszerűség kedvéért azonnal a $P^n_\nu(x)$ és $Q^n_\nu(x)$ jelzést használtam.

a $P_\nu^n(x)$ és $Q_\nu^n(x)$ határozott integrállal fejezhető ki, mely nem egész számú $n$ és $\nu$ esetén is megtartja érvényességét és eleget tesz a (12) differencziálegyenletnek. Ugyanis bármely $x$ érték mellett, melynek valós része pozitiv

$$P_\nu^n(x) = \frac{1}{\pi}(-1)^\nu 2^n \frac{\Pi n\, \Pi n}{\Pi(2n)} \int_0^\pi \frac{\cos\nu\varphi\,.\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}, \tag{14}$$

$$Q_\nu^n(x) = \frac{\Pi(2n+1)}{2^n \Pi(n+\nu)\,\Pi(n-\nu)} \int_0^\infty \frac{\cos i\nu\varphi d\varphi}{(x+\cos iu\sqrt{x^2-1})^{n+1}} =$$

$$= \frac{\Pi(2n+1)}{2^n \Pi n\, \Pi n} \int_0^{v_0} (x-\cos iv\sqrt{x^2-1})^n \cos i\nu v dv, \tag{15}$$

hol

$$v_0 = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}.$$

(l. c. 207. és 224. l.). A jobboldali kifejezéseket tehát említett tulajdonságaiknál fogva bármely $n$ vagy $\nu$ esetén is adjungált függvénynek tekintjük és $P_\nu^n(x)$, ill. $Q_\nu^n(x)$-el jelöljük.

Szólanunk kell még a $P^n(x)$ és $Q^n(x)$ gömbfüggvényeknek úgynevezett *addiczió-tételéről.*

A $T$ kifejezésében $\cos\gamma$, ha $\vartheta_1$ és $\varphi_1$-et is változónak tekintjük, több változónak függvénye; (1) szerint

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\psi-\psi_1).$$

Legyen

$$\cos\gamma = z, \quad \cos\vartheta = x, \quad \cos\vartheta_1 = x_1, \quad \psi-\psi_1 = \varphi,$$

akkor úgy a $P^n(z)$, mint $Q^n(z)$ kifejthető a $\varphi$ többszöröseinek cosinusa szerint haladó sorba, melyben az együtthatók $x$ és $x_1$-nek adjungált függvényei. A $P^n(z)$ kifejtése

$$P^n(xx_1 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_1^2}\cos\varphi) =$$

$$= \sum_0^n{}' (-1)^\nu 2\cdot\frac{[1\,.\,3\ldots(2n-1)]^2}{\Pi(n+\nu)\,\Pi(n-\nu)} P_\nu^n(x) P_\nu^n(x_1)\cos\nu\varphi,$$

(l. c. 312. l.), a $Q^n(z)$-é pedig, ha $x$ és $x_1$ valós és $x>x_1>1$, negativ vagy tört $n$ esetén is

$$Q^n(xx_1+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_1^2}\cos\varphi) =$$
$$= \frac{2}{2n+1}\sum^{\infty}{}' P_\nu^n(x_1)\,Q_\nu^n(x)\cos\nu\varphi, \tag{16}$$

(l. c. 333. l.), hol mindkét egyenletben a $\Sigma'$ oly összeget jelent, mely $\nu$ szerint halad $\nu = 0$-tól, de az első tag felével veendő ($\frac{1}{2}$ együtthatóval.) Ezeket az egyenleteket nevezik a $P^n(z)$, illetőleg $Q^n(z)$ gömbfüggvény addiczió-tételének.

Végre hivatkozni fogunk még egy, GAUSStól eredő sorbafejtésre, a mely a következő:

$$(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^{-n} = 2\sum^{n}{}' A_\nu\cos\nu\varphi, \tag{17}$$

hol

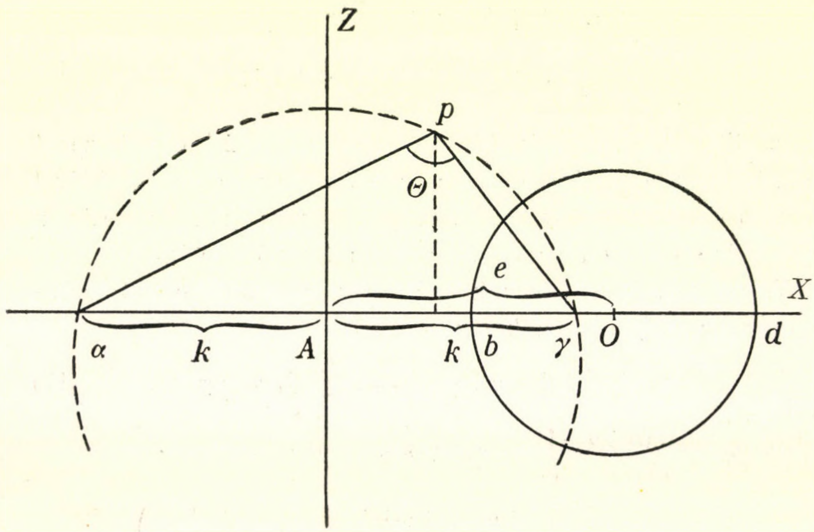
$$A_\nu = \frac{\Pi(n+\nu-1)}{\Pi\nu\,\Pi(n-1)}(a^2+b^2)^{-n-\nu}(ab)^\nu\times$$
$$\times F\left(\frac{n+\nu}{2}, \frac{n+\nu+1}{2}, \nu+1, \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right),$$

és $F$ hipergeometrikus sort jelent.

## II. A gyűrűkoordináták.

A körgyűrűre vonatkozó vizsgálatokra legalkalmasabb a C. NEUMANNtól bevezetett görbevonalú gyűrű-koordinátarendszer. Hogy erre átt érhessünk, vegyünk fel a térben közönséges egyenesvonalú derékszögű koordinátarendszert. A körgyűrű egy körlapnak síkjában fekvő egyenes (mint tengely) körüli forgásából származik. Ez a forgástengely legyen a $z$ tengely. Erre merőleges, a kör $O$ középpontján áthaladó egyenes az $x$ tengely; utóbbit 90°-nyira elforgatva kapjuk az $y$ tengelyt.

A görbevonalú gyűrű-koordinátarendszer már most a következő. Legyen a kör sugara, melynek forgatásából a körgyűrű származott, $a$, középpontja $O$ s a körnek az $x$ tengelylyel való metszéspontjai $b$, $d$. Az $AO$ egyenesen választunk két $\alpha$, $\gamma$ pontot úgy, hogy $\alpha$, $\gamma$ egyenlő távol legyen $A$-tól és a $b$, $d$-vel harmonikus négy pontot képezzenek. Legyen $AO = e$ és az ismeretlen $A\alpha = A\gamma = k$. Hogy az $\alpha$, $\gamma$ a $b$, $d$-vel mint alap-




1. ábra.

pontokkal harmonikus helyzetű legyen, annak feltétele, ha $b$, $d$, $a$, $\gamma$ koordinátáit sorra röviden $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$-el jelöljük, mint ismeretes az, hogy kettős viszonyuk

$$(bd\alpha\gamma) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = -1$$

legyen, a mi így is írható

$$x_1 x_2 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3 x_4 = 0.$$

Feltettük, hogy $\alpha$, $\gamma$ az $A$ kezdőponttól egyenlő távol legyenek, tehát koordinátáik ellentetten egyenlők

$$x_3 + x_4 = 0$$

s így az előbbi egyenletből marad, hogy

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0,$$

vagy ha a koordináták értékeit

$$x_1 = e - a, \quad x_2 = e + a, \quad x_3 = -x_4 = k$$

behelyettesítjük,

$$(e-a)(e+a)=k^2,$$

miáltal $k$ és vele együtt az $a$ és $\gamma$ pontok helyzete meg van határozva:

$$k^2=e^2-a^2 \tag{18}$$

s ugyancsak ezen egyenlet segítségével egy derékszögű háromszögből könnyen meg is szerkeszthető.

Ezek után a gyűrűkoordináták a következők. Az egyik a $z$ tengely körüli forgásszög $\psi$, a másik a $\theta = ap\gamma\measuredangle$, a harmadik $\sigma$, mely a következő egyenlettel van meghatározva

$$\frac{\overline{ap}}{\overline{\gamma p}}=e^{\sigma}, \tag{19}$$

vagy

$$\sigma=\log\overline{ap}-\log\overline{\gamma p}. \tag{19'}$$

Hogy e koordináták jelentését és természetét világosabban lássuk, vizsgáljuk meg miféle felületek származnak, ha a $\sigma$, $\theta$, $\psi$ koordináták egyikét egymás után állandóvá teszszük. A $\psi$=const. felület, mint könnyen belátható, nem egyéb, mint a $z$ forgástengelyen átmenő félsík, határa a $z$ tengely; meridiánsíknak is nevezhetjük.

A $\sigma$ = const.-nak megfelelő felületet úgy találjuk, hogy meghatározzuk az $xz$ síkban, azaz $\psi=0$-nál a $\sigma$ = const. görbét, ennek forgatása fogja leírni a $\sigma$ = const. felületet. Ha $\sigma$ állandó, akkor $e^{\sigma}$ és $e^{2\sigma}$ is az; tehát

$$e^{2\sigma}=\frac{\overline{ap}^2}{\overline{\gamma p}^2}=\text{const.}=c^2;$$

de

$$\overline{ap}^2=(k+x)^2+z^2,$$

$$\overline{\gamma p}^2=(k-x)^2+z^2,$$

tehát a fenti egyenletből

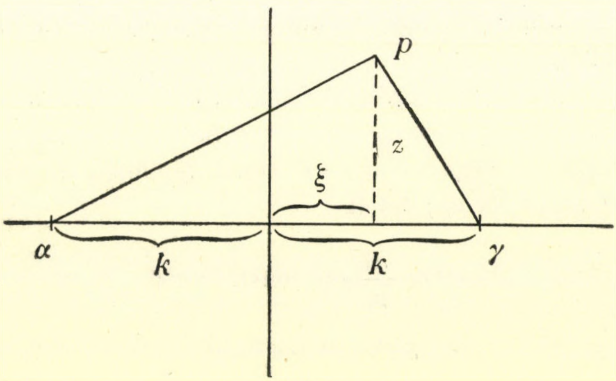
$$(k+x)^2+z^2-c^2(k-x)^2-c^2z^2=$$
$$=(1-c^2)x^2+(1-c^2)z^2+2k(1+c^2)x+(1-c^2)k^2=0$$

ez pedig a kör egyenlete, mert $x^2$ és $z^2$ együtthatója ugyanaz és az $xz$ együtthatója 0, még pedig oly kör, melynek czentruma az $x$ tengelybe esik. Ha $c$ helyébe a

$$c_0 = \frac{\overline{ab}}{\overline{\gamma b}} = \frac{k+(e-a)}{k-(e-a)}$$

értéket helyettesítjük, az $O$ centrum körüli $a$ sugarú kört kapjuk. Ha e $\sigma = \text{const.}$ köröket a $z$ tengely körül forgatjuk, csupa körgyűrű-felületet kapunk. Tehát minden $\sigma$ értéknek egy gyűrűfelület felel meg, melyek egymást beburkolják akként, hogy a nagyobb $\sigma$ értéknek megfelelő gyűrűfelület van belül. Ha $ap = \gamma p$, akkor $\sigma = 0$, ekkor a kör átmegy a $z$ forgástengelybe, czentruma a $\infty$-ben van. Ha $\sigma$ nő 0-tól $\infty$-ig, a $\sigma = \text{const.}$ körök az egész meridián-félsíkot beburkolják és $\sigma = \infty$-nek a $\gamma$ pont forgatásából származó kör felel meg. Az $e^\sigma = c_0$ értékre a vizsgált gyűrűalakú test (vezető) felületét kapjuk. Ez egyik fontos tulajdonsága a gyűrűkoordinátáknak.

Végre a $\theta = \text{const.}$ görbe az $xz$ síkban egy, az $a$ és $\gamma$ pontokon áthaladó kör, melyben $\theta$ az $\overline{a\gamma}$ húrhoz tartozó kerületi




2. ábra.

szög, tehát a $\theta = \text{const.}$ felület az $a\gamma$ körön áthaladó gömb. A $\sigma = \text{const.}$ körökből láthatjuk, hogy míg $p$ a kör kerületét befutja, $\theta$ a $-\pi$-től $+\pi$-ig változik.

E három felületsor, mint alább meglátjuk, egymást orthogonálisan metszi.

A $\sigma$, $\theta$, $\psi$ koordinátáknak összefüggése az $x$, $y$, $z$-vel már most a következő. Vegyünk fel egy $\psi = \text{const.}$ meridiánsíkban derékszögű koordinátákat. Az egyik legyen a $z$ koordináta, a másik erre az $A$ kezdőpontban merőleges, jelöljük $\xi$-vel, akkor ennek összefüggése $x$ és $y$-al

$$x = \xi \cos\psi, \quad y = \xi \sin\psi. \tag{a}$$

Ezután

$$\begin{aligned} z^2+(k+\xi)^2 &= \overline{ap}^2, \\ z^2+(k-\xi)^2 &= \overline{\gamma p}^2, \\ 4k\xi &= \overline{ap}^2-\overline{\gamma p}^2, \\ &= \overline{\gamma p}^2(e^{2\sigma}-1). \end{aligned} \tag{b}$$

Az $a\gamma p$ háromszögből

$$\begin{aligned} 4k^2 &= \overline{ap}^2+\overline{\gamma p}^2-2\overline{ap}\,\overline{\gamma p}\cos\theta \\ &= \overline{\gamma p}^2(e^{2\sigma}+1-2e^{\sigma}\cos\theta) \\ &= 2\overline{\gamma p}^2 . e^{\sigma}\left(\frac{e^{-\sigma}+e^{\sigma}}{2}-\cos\theta\right), \end{aligned}$$

de

$$\frac{e^{-\sigma}+e^{\sigma}}{2} = \cos i\sigma,$$

tehát

$$\overline{\gamma p}^2 = \frac{2k^2e^{-\sigma}}{\cos i\sigma-\cos\theta}. \tag{c}$$

Továbbá a $(b)$-ben

$$e^{2\sigma}-1 = -e^{\sigma}(e^{-\sigma}-e^{\sigma}) = -e^{\sigma}.\,2i\sin i\sigma,$$

ezt és $\overline{\gamma p}^2$ értékét $(b)$-be helyettesítve

$$\xi = -\frac{ki\sin i\sigma,}{\cos i\sigma-\cos\theta}, \tag{d}$$

és innen $(a)$ szerint

$$x = -\frac{ki\sin i\sigma\cos\psi}{\cos i\sigma-\cos\theta}, \quad y = -\frac{ki\sin i\sigma\sin\psi}{\cos i\sigma-\cos\theta}. \tag{20}$$

Végre a $z$ koordinátát az $a\gamma p\,\triangle$ kétszeres területéből kapjuk

$$\begin{aligned} z\,.\,\overline{a\gamma} &= \overline{ap}\,.\,\overline{\gamma p}\sin\theta = \overline{\gamma p}^2e^{\sigma}\sin\theta \\ &= \frac{2k^2\sin\theta}{\cos i\sigma-\cos\theta}, \end{aligned}$$

s innen, mivel $\overline{ap} = 2k$,

$$z = \frac{k \sin\theta}{\cos i\sigma - \cos\theta}. \tag{21}$$

Itt összefoglalva újból kiemeljük, hogy a $\psi$ változik 0-tól $2\pi$-ig, a $\theta$ megy $-\pi$-től $+\pi$-ig (negativ $z$-re negativ), és $\sigma$ a 0-tól $\infty$-ig.

A $\sigma$, $\theta$, $\varphi$ orthogonális koordináta-rendszert képeznek. Hogy ez így van, arra elegendő kimutatni, hogy a megismert három felületsor egymást orthogonálisan metszi. Az világos, hogy a $\psi$=const. meridiánsík a $\sigma$=const. gyűrűfelületet és a $\theta$=const. gömböt bármely helyzetben orthogonálisan metszi; és mivel a $\sigma$ = const. és $\theta$ = const. forgási felületek, tehát csak azt kell kimutatni, hogy bármely $\varphi$ = const. meridiánsíkban a $\sigma$=const. görbe és $\theta$ = const. görbe egymást orthogonálisan metszik. Ez teljesítve van, ha e síkban az ívelem, $d\xi^2 + dz^2$, a $d\sigma$ és $d\theta$-val következőkép fejezhető ki:

$$d\xi^2 + dz^2 = A \,.\, d\sigma^2 + B \,.\, d\theta^2,$$

azaz a $d\sigma \,.\, d\theta$ együtthatója 0.

$$d\xi^2 + dz^2 = \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)^2\right] d\sigma^2 + \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right] d\theta^2 +$$
$$+ 2\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\right] d\sigma d\theta,$$

az együtthatókat a ($d$) és (21) egyenletekből kiszámítva

$$d\xi^2 + dz^2 = \frac{k^2}{(\cos i\sigma - \cos\theta)^2} (d\sigma^2 + d\theta^2),$$

tehát a $d\sigma \,.\, d\theta$ tag együtthatója 0, azaz $d\sigma$ és $d\theta$ a sík bármely pontjában egymásra merőlegesek, s ezzel ki van mutatva, hogy $\sigma$, $\theta$, $\psi$ orthogonális koordinátarendszert alkotnak.

Még kifejtjük a $V$ potencziált és két pont egymástól való távolságának recziprok értékét alkalmas sorokba. Ez utóbbi kifejtését C. Neumann adta a gyűrűalakú testről írt, idézett vizsgálataiban.[1] Mi HEINEnek némileg egyszerűsített kifejezésmódjában fogjuk azokat használni (l. c. II. kötet, 283—290. l.).

A $V$ potencziálnak LAPLACE-féle differencziálegyenlete

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

ha új, orthogonális $\lambda$, $\mu$, $\nu$ koordinátarendszert vezetünk be, ebbe transzformálva a következő alakot ölti, mint az számos kézikönyvben megtalálható

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{MN}{L}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{NL}{M}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{LM}{N}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right) = 0,$$

hol

$$L^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2,$$

$$M^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2,$$

$$N^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2.$$

A $\sigma$, $\theta$, $\psi$ koordinátákban ezek a (20) és (21) egyenletekből

$$L^2 = \frac{k^2}{(\cos i\sigma - \cos\theta)^2},$$

$$M^2 = \frac{k^2}{(\cos i\sigma - \cos\theta)^2},$$

$$N^2 = -\frac{k^2 \sin^2 i\sigma}{(\cos i\sigma - \cos\theta)^2}.$$

Ezeket behelyettesítve kapjuk a LAPLACE-féle egyenletet gyűrűkoordinátákban

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\frac{\sin i\sigma}{(\sigma,\theta)^2}\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right] + \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sin i\sigma}{(\sigma,\theta)^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right] -$$

$$- \frac{1}{\sin i\sigma(\sigma,\theta)^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\psi^2} = 0, \quad (22)$$

---

[1] A potencziálnak alábbi kifejtése tudomásom szerint HEINEnél (l. c.) fordul elő először.

hol rövidség kedvéért

$$(\sigma,\,\theta) = \sqrt{\cos i\sigma - \cos\theta}.$$

A LAPLACE-féle egyenlet közvetlenül szolgáltatja a $V$ potencziál sorbafejtését. Vezessünk be a LAPLACE-féle egyenletben $V$ helyébe új $v$ változót a következő egyenlettel

$$V = (\sigma,\,\theta)\,v, \tag{23}$$

akkor a (22) egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\sigma^2} + i\operatorname{ctg} i\sigma\frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} - \frac{1}{\sin^2 i\sigma}\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2} + \frac{v}{4} = 0. \tag{24}$$

Fejtsük ki $v$-t a $\theta$ és $\psi$ többszöröseinek sinusa és cosinusa szerint haladó kettős trigonometrikus sorba

$$v = \mathbf{S}\sum_{\mu=0}^{\infty}{}'\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' s_{\mu\nu}\cos\mu\psi\cos\nu\theta, \tag{25}$$

hol $s_{\mu\nu}$ már csak a $\sigma$-nak függvénye, és a kettős sor előtt álló $S$ azt jelenti, hogy a felirt sorhoz még az a három veendő, melyet ebből a cos-nak sinussal való felcserélése által kapunk, vagyis a $\cos\mu\psi\sin\nu\theta$, $\sin\mu\psi\cos\nu\theta$ és $\sin\mu\psi\sin\nu\theta$ szerint haladó sorok. A $\Sigma$ mellé tett vessző pedig itt s a továbbiakban is azt jelenti, hogy a $\mu=0$, illetőleg a $\nu=0$-nak megfelelő tag csak felével (azaz $\frac{1}{2}$-el szorozva, s így a $\mu=\nu=0$-nak megfelelő $\frac{1}{4}$-el szorozva) veendő. Az $s_{\mu\nu}$ függvényeket úgy kell meghatározni, hogy $v$ eleget tegyen a (24) egyenletnek, azaz a

$$\mathbf{S}\sum_{\mu=0,\,\nu=0}^{\infty}{}'\left\{\frac{\partial^2 s_{\mu\nu}}{\partial\sigma^2} + i\operatorname{ctg} i\sigma\frac{\partial s_{\mu\nu}}{\partial\sigma} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\mu^2}{\sin^2 i\sigma} - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\right]s_{\mu\nu}\right\}\cos\mu\psi\cos\nu\theta = 0$$

egyenlet ki legyen elégítve. Ez kettős trigonometrikus sor lévén, csak úgy állhat fenn, ha minden együttható 0, azaz minden $\mu$ és $\nu$ érték mellett

$$\frac{\partial^2 s_{\mu\nu}}{\partial\sigma^2} + i\operatorname{ctg} i\sigma\frac{\partial s_{\mu\nu}}{\partial\sigma} + \left[\frac{\mu^2}{\sin^2 i\sigma} - \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]s_{\mu\nu} = 0.$$

Ez azonban nem egyéb, mint az adjungált gömbfüggvények differencziálegyenlete; mert ha $\cos i\sigma = x$, akkor ez a következőbe megy át

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 s_{\mu\nu}}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial s_{\mu\nu}}{\partial x} + \left[\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right) - \frac{\mu^2}{(1-x^2)}\right]s_{\mu\nu} = 0,$$

ez pedig az adjungált függvények (12) alatti differencziálegyenlete, melynek általános megoldása (13) szerint következő alakú

$$s_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) + b_{\mu\nu}Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma),$$

hol $a_{\mu\nu}$ és $b_{\mu\nu}$ állandók. És így a (25) és (23) egyenletek értelmében a potencziál legáltalánosabb alakja

$$V = (\sigma, \theta)\,\mathrm{S}\sum_{\mu=0,\,\nu=0}^{\infty}{}' \left[a_{\mu\nu}P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) + \right.$$

$$\left. + b_{\mu\nu}Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma)\right]\cos\mu\psi\cos\nu\theta. \quad (26)$$

Az itt fellépő $P$ és $Q$ gömbfüggvényeket az első fejezetből már ismerjük. A (14) és (15) egyenletek szerint ezek, tekintetbe véve, hogy

$$\Pi(m-\tfrac{1}{2}) = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi},$$

hol $m$ egész szám, következőkép fejezhetők ki:

$$P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) =$$

$$= \frac{1}{2^{\nu+\frac{1}{2}}}\,\frac{3.5\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots(2\nu-2)}\int_0^\pi \frac{\cos\mu\varphi\, d\varphi}{(\cos i\sigma + i\sin i\sigma\cos\varphi)^{\nu+\frac{1}{2}}},$$

$$Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) = \quad (27)$$

$$= \frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\pi}\,\frac{2.4\ldots 2\nu}{1.3\ldots(2\nu-1)}\int_0^{v_0}(\cos i\sigma + i\sin i\sigma\cos iv)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos i\mu v\, dv,$$

hol

$$v_0 = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}.$$

(Ha $\nu=0$, akkor $P$ kifejezésében az integrál előtti együttható $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q$-ban $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$, $\nu=1$ esetén $P$-ben $\frac{1}{2\sqrt{2}}$).

Hátra van még két pont egymástól való távolsága $T$ reciprok értékének kifejtése. Legyenek az $(x, y, z)$ és $(x_1, y_1, z_1)$ pontok NEUMANN-féle koordinátái $(\sigma, \theta, \psi)$, ill. $(\sigma_1, \theta_1, \psi_1)$, akkor a (20) és (21) egyenletek értelmében

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} = \frac{(\sigma, \theta)(\sigma_1, \theta_1)}{k\sqrt{2}} \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{\cos i\sigma \cos i\sigma_1 + \sin i\sigma \sin i\sigma_1 \cos\mu(\psi-\psi_1) - \cos(\theta-\theta_1)}} =$$
$$= \frac{(\sigma, \theta)(\sigma_1, \theta_1)}{k\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z-\cos(\theta-\theta_1)}}, \tag{28}$$

hol

$$z = \cos i\sigma \cos i\sigma_1 + \sin i\sigma \sin i\sigma_1 \cos\mu(\psi-\psi_1)$$

és

$$(\sigma, \theta) = \sqrt{\cos i\sigma - \cos\theta}, \quad (\sigma_1, \theta_1) = \sqrt{\cos i\sigma_1 - \cos\theta_1}.$$

A (17) alatti egyenlet szerint

$$\frac{1}{(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^n} = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' A_\nu \cos\nu\varphi,$$

hol

$$A_\nu = \frac{\Pi(n+\nu-1)}{\Pi\nu\, \Pi(n-1)} (a^2+b^2)^{-n-\nu} (ab)^\nu \times$$
$$\times F\left(\frac{n+\nu}{2}, \frac{n+\nu+1}{2}, \nu+1, \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right).$$

Legyen

$$\frac{a^2+b^2}{2ab} = z \quad \text{és} \quad n = \tfrac{1}{2},$$

akkor

$$A_\nu = \frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi\nu\, \Pi(-\frac{1}{2})} \frac{z^{-(\nu-\frac{1}{2})-1}}{2^{\nu+\frac{1}{2}}\sqrt{ab}} \times$$
$$\times F\left[\frac{(\nu-\frac{1}{2})+1}{2}, \frac{(\nu-\frac{1}{2})+2}{2}, (\nu-\tfrac{1}{2})+\tfrac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right].$$

A jobboldalt összehasonlítva $Q^n(x)$-nek (7) alatti kifejezésével látjuk, hogy $z$ hatványa és a hipergeometrikus sor teljesen megegyezik a $Q^n$ kifejezésének megfelelő részével, ha $n$ helyébe $n = \nu - \frac{1}{2}$-et írunk, s a $z$-t nem tartalmazó együttható is csak alakra különbözik a $Q^n$ kifejezésében levőtől. Ugyanis nem egész számú $n$ index esetén, tehát a jelen esetben is, a (7) egyenletben szereplő konstans együttható helyett annak következő általánosabb alakját kell venni, mely egész számú $n$-re megegyezik a (7) alattival

$$c_n = \frac{2^n \Pi n \, \Pi n}{\Pi(2n+1)}.$$

Legyen

$$n = \nu - \tfrac{1}{2},$$

akkor az egyik $\Pi(\nu-\frac{1}{2})$-et a

$$\Pi(\nu-\tfrac{1}{2}) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\nu-1)}{2^\nu}\sqrt{\pi}$$

egyenlet alapján helyettesítve

$$c_{\nu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2^\nu \Pi\nu} = \frac{\pi}{2^{\nu+\frac{1}{2}}}\,\frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(\nu)\,\Pi(-\frac{1}{2})},$$

ha t. i. a $\sqrt{\pi}$-t a

$$\sqrt{\pi} = \Pi(-\tfrac{1}{2})$$

kifejezéssel helyettesítjük. E szerint az $A_\nu$ együttható nem egyéb, mint

$$A_\nu = \frac{1}{\pi\sqrt{ab}}\,Q^{\nu-\frac{1}{2}}(z),$$

és így

$$\frac{1}{\sqrt{z-\cos(\theta-\theta_1)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(z)\cos\nu(\theta-\theta_1). \qquad (29)$$

A (29) egyenlet új kifejezést szolgáltat a $Q$ függvény számára. Jelöljük $\theta-\theta_1$-et röviden $\varphi$-vel és integráljuk a (29) egyenlet $\cos\nu\varphi$-szeresét $\varphi$ szerint 0-tól $\pi$-ig, akkor a jobboldali összegnek csak a $\nu$-edik tagja marad, s ebből, ha $z$ helyett is argumentumnak $\cos i\sigma$-t írunk

$$Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\pi \frac{\cos\nu\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\cos i\sigma-\cos\varphi}}.$$

A $Q^{\nu-\frac{1}{2}}(z)$-t még kifejthetjük a $Q$ gömbfüggvény addicziótétele szerint. Ugyanis a (16) alatti addiczió-tétel értelmében, ha pl. $\sigma > \sigma_1$,

$$Q^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\cos i\sigma \cos i\sigma_1 + \sin i\sigma \sin i\sigma_1 \cos \mu(\psi-\psi_1)\right) =$$
$$= \frac{1}{\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_1)\, Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) \cos \mu(\psi-\psi_1),$$

úgy hogy végre a (29) és (28) egyenletekből két pont egymástól való távolsága recziprok értékének keresett kifejtése

$$T = \frac{2(\sigma, \theta)(\sigma_1, \theta_1)}{k\pi} \sum_{\nu}^{\infty}{}' \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_1)\, Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) \times$$
$$\times \frac{1}{\nu} \cos \nu(\theta-\theta_1) \cos \mu(\psi-\psi_1), \qquad (30)$$
$$(\sigma_1 < \sigma)$$

megjegyezve, hogy a $\nu=0$-nak megfelelő tagban az $\frac{1}{\nu}$ helyett egyszerűen 1 veendő, mint az az addiczió-tételnek ez esetre vonatkozó vizsgálatából következik. A $P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}$ és $Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}$ függvények expliczit alakját fentebb már láttuk.

Ide csatoljuk, mivel helyenként egyszerűsítéseket tesz lehetővé, a következő egyenletet is, mely a (7) és (15) egyenlőségek összehasonlításából közvetlenül adódik

$$Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma) = \frac{\pi}{2^{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{1\,.\,3\ldots(2\nu-1)}{2\,.\,4\ldots(2\nu)} Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma), \qquad (31)$$

Végül meg kell még határoznunk a körgyűrű felületének elemét. A gyűrűfelület egyenletét, mint láttuk, közvetlenül a (20) és (21) alatti egyenletek adják, ha azokban $\sigma$-t állandóval teszszük egyenlővé

$$\sigma = \text{const.} = \sigma_0.$$

Jelöljük a gyűrű felületének elemét $dO$-val, akkor ezt, mint a felületelméletből ismeretes, mivel $\theta$ és $\psi$ orthogonális koordináták, a következő egyenlet szolgáltatja

$$dO = MNd\theta d\psi,$$

hol $M$ és $N$ a 18. és 19. lapon előforduló mennyiségek. Ezek értékét behelyettesitve kapjuk a körgyűrű felületelemét:

$$dO = - \frac{k^2 \sin i\sigma_0}{(\sigma_0, \theta)^4} d\theta d\psi, \tag{32}$$

(negativ előjellel veendő, hogy $dO$ pozitiv legyen).

## III. C. Neumann problémája.[1]

Ismertetnem kell még az eljárást, melylyel C. NEUMANN problémáját megoldotta, mivel ez szolgált a jelen dolgozat kiindulásául és alapjául, s ennek gondolatmenetét fogjuk követni a mi feladatunk megfejtésében is.[2]

Képzeljünk egy szigetelő közegben elhelyezett jó vezető körgyűrűt, melynek felületét a

$$\sigma = \text{const.} = \sigma_s$$

érték szolgáltatja. Ezt a gyűrűalakú vezetőt bizonyos elektromos töltéssel látjuk el. Már most NEUMANN azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy a gyűrűvel közölt elektromosság, miképen helyezkedik el a körgyűrű felületén, ha a gyűrűre semmiféle külső (elektromos) erők nem hatnak?

Legyenek a gyűrű felületei egy $s$ pontjának koordinátái $\theta_s$, $\varphi_s$, az $s$ pontot magában foglaló felületeken $dO_s$. Jelöljük az elektromosság sűrűségét a $dO_s$ felületelemen $\rho_s$-el, akkor $\rho_s \times dO_s$ nem egyéb, mint a $dO_s$ felületelemen elterülő elektromosság mennyisége. A $\rho_s$ sűrűség minden esetre a $\theta_s$ és $\psi_s$-nek valami függvénye, úgy hogy $\rho_s dO_s$ következő alakú

$$\rho_s dO_s = F(\theta_s, \psi_s) \, d\theta_s d\psi_s,$$

hol $F(\theta_s, \psi_s)$ a $\theta_s$, $\psi_s$-nek valami függvénye. A feladat tehát csak az $F$ függvény meghatározása.

---

[1] A jelölés, valamint a $P$ és $Q$ függvények némileg különböznek a NEUMANN-nál előfordulóktól, utóbbira l. a Bevezetés végét.

[2] C. NEUMANN, l. c. 38—45. lap.

NEUMANN a $\rho_s dO_s$ szorzatot a következő alakban írja

$$\rho_s dO_s = \frac{f(\theta_s, \psi_s)}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}} d\theta_s d\psi_s. \qquad (a)$$

Az $f$ függvény alakját a következő meggondolással állapítja meg, mely nagyon megkönnyíti az $f$ meghatározását.

A gyűrűfelület bármely $\psi = \text{const.}$ meridiánsíkra szimmetrikus, tehát a mondott feltételek mellett a sűrűségnek bármely meridiánkör mentén ugyanannak kell lennie, vagyis $\rho_s$ és így $f$ is független $\psi_s$-től: $f = f(\theta_s)$, csakis $\theta_s$ függvénye. A gyűrűfelület továbbá az $xy$ ekvátorsíkra nézve is szimmetrikus, tehát az $xy$ síkra nézve szimmetrikus fekvésű pontokban, illetőleg körökben a sűrűségnek egyenlőnek kell lennie. A koordinátarendszer tárgyalásából világos, hogy bármely $\theta_s$ ponttal (ill. körrel) szimmetrikus a $-\theta_s$ pont (ill. kör), tehát $f$-nek a $+\theta_s$ és $-\theta_s$ értékre egyenlőnek kell lennie. De ez azt mondja, hogy ha $f$-et $\theta_s$ többszörösei szerint haladó trigonometrikus sorba fejtjük ki, ez csak a cosinusos tagokat tartalmazhatja, tehát következő alakú

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_\nu \cos \nu\theta_s. \qquad (b)$$

Tehát csak a $K_\nu$ együtthatókat kell meghatározni. Ezeket a következő meggondolással határozza meg.

Egyensúly esetén a potencziálnak a vezető egész belsejében állandónak kell lennie. A gyűrű belsejében uralkodó potencziál a jelen esetben egyedül a felületen elhelyezkedett elektromos töltéstől származik, tehát a gyűrű belsejének egy $i(\sigma_i, \theta_i, \psi_i)$ pontjában a $V_i$ potencziál

$$V_i = \int \frac{\rho_s dO_s}{R_{is}} = \int \rho_s T_{is} dO_s,$$

hol $R_{is}$ az $i$ és $s$ pontoknak egymástól való távolsága, $T_{is} = \frac{1}{R_{is}}$ és az integráczió a gyűrű egész felületére vonatkozik. Tehát a $K$ együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy a potencziál

$$V_i = \int \rho_s T_{is} dO_s = \text{const.}$$

legyen a gyűrű egész belsejében, azaz független legyen a $\sigma_i$, $\theta_i$, $\psi_i$ koordinátáktól. A (30) egyenlet értelmében, mivel $\sigma_i > \sigma_s$,

$$T_{is} = \frac{2(\sigma_i, \theta_i)(\sigma_s, \theta_s)}{k\pi} \sum_{\nu}^{\infty}{}' \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \times$$

$$\times \frac{1}{\nu} \cos \nu(\theta_i - \theta_s) \cos \mu(\psi_i - \psi_s).$$

Ezt, valamint $\rho_s dO_s$-nek $(a)$ és $(b)$ alatti értékét behelyettesítve s az integrácziót elvégezve azt találjuk, hogy

$$\int \rho_s T_{is} dO_s = \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_\nu \cos \nu\theta_s\right) \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{T_{is} d\psi_s}{(\sigma_s, \theta_s)} \right\} d\theta_s =$$

$$= \frac{2\pi}{k} (\sigma_i, \theta_i) \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{K_\nu}{\nu} P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos \nu\theta_i,$$

vagy ha $(\sigma_i, \theta_i)$-t a (29) és (31) szerint kifejezzük

$$(\sigma_i, \theta_i) = \sqrt{\cos i\sigma_i - \cos \theta_i} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos \nu\theta_i} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' C_\nu Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos \nu\theta_i},$$

akkor

$$\int \rho_s T_{is} dO_s = \frac{\pi^2}{k\sqrt{2}} \frac{\sum_{\nu}^{\infty}{}' \frac{K_\nu}{\nu} P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos \nu\theta_i}{\sum_{\nu}^{\infty}{}' C_\nu Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos \nu\theta_i}.$$

Hogy ez a gyűrű belsejében mindenütt állandó, azaz a $\sigma_i$, $\theta_i$-től független legyen, kell, hogy a számlálóban levő sor minden egyes tagja a nevezőben levő sor megfelelő tagjától csak ugyanabban az állandó tényezőben különbözzék, azaz, ha ezt a tényezőt $\gamma$-val jelöljük, kell, hogy

$$\pi^2 \frac{K_\nu}{\nu} P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) = \gamma \,.\, k\sqrt{2}\, C_\nu,$$

innen

$$K_\nu = \gamma \frac{k\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{\nu C_\nu}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}.$$

A $\gamma$ állandó a gyűrű töltéséből határozható meg.

Tehát $K_\nu$ értékét behelyettesitve

$$\rho_s dO_s = \gamma \frac{k\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{1}{(\sigma_s, \theta_s)} \sum_\nu^{\infty}{}' \frac{\nu C_\nu}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} \cos \nu\theta_s d\theta_s d\psi_s;$$

a (32) szerint

$$dO_s = -\frac{ik^2 \sin i\sigma_s}{(\sigma_s, \theta_s)^4} d\theta_s d\psi_s,$$

ezzel osztva az előbbi egyenletet kapjuk a keresett sűrűséget, a NEUMANN-féle probléma megoldását:

$$\rho_s = -\gamma \frac{\sqrt{2}(\sigma_i, \theta_i)^3}{ik\pi^2 \sin i\sigma_s} \sum_\nu^{\infty}{}' \frac{\nu C_s}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} \cos \nu\theta_s$$

(C. NEUMANN, l. c. 43. és 44. l.).

Fejtegetéseinek befejezéseképen megjegyzi, hogy hasonló módon határozható meg az elektromosság elhelyezkedése az esetben is, midőn erre a részecskék egymásra hatásán kívül még külső erők is hatnak. Ez esetben az $f$ függvény, mint a $\theta_s$ és $\psi_s$ függvénye, a $\theta_s$ és $\psi_s$ többszörösei szerint haladó kettős trigonometrikus sorba fejthető ki, melynek együtthatói úgy határozhatók meg, hogy ekkor a felületen elhelyezkedett elektromosság potencziálja és a külső erők potencziálja összegének kell állandónak lennie a vezető egész belsejében.

NEUMANN ezt az esetet tovább nem tárgyalja, s a potencziál általános kifejezését sem adja, mely, mint megjegyzéséből is kitünik, e feladat megoldásához szükséges. Ezen általánosabb eset részletes kifejtése fogja képezni fejtegetéseink tárgyát. Még pedig előbb azon esetet tárgyaljuk, midőn a gyűrűre csakis külső erők hatnak, azaz a gyűrűnek nincs szabad töltése, s azután általánosítjuk eredményeinket az esetre, midőn a gyűrűnek szabad töltése is van.

## IV. A megosztott elektromosság eloszlása, ha a gyűrűnek nincs töltése.

Ezek után rátérhetünk tulajdonképeni problémánk tárgyalására. Vegyünk fel, mint előbb, egy szigetelő közegben elhelyezett jó vezető körgyűrűt, melynek felületét a

$$\sigma = \text{const.} = \sigma_s$$

szolgáltatja. A vezető gyűrű legyen eredetileg közömbös állapotban, azaz ne legyen szabad töltése és legyenek a gyűrűn kivül a szigetelő közegben tetszőleges elektromos tömegek elhelyezve, akkor ezek a vezető gyűrűre influálólag hatnak. Már most problémánk az, miképen oszlik el az említett elektromos erők hatása alatt a megosztás útján létrejött elektromosság a gyűrű felületén? S mivel az elektromosság ezen eloszlását az elektromosság sűrűsége mutatja, problémánk szabatosabban kifejezve a következő: *határozzuk meg a mondott feltételek mellett a gyűrű felületén elhelyezkedett elektromosság sűrűségét a felület minden pontjában.*

Legyenek a gyűrű felülete egy $s$ pontjának koordinátái ismét $\theta_s$, $\psi_s$, e pontot magában foglaló felületelem $dO_s$, az elektromosság sűrűsége az $s$ pontban (illetőleg a $dO_s$ felületelemen) $\rho_s$, akkor $\rho_s dO_s$ nem egyéb, mint a $dO_s$ felületelemen elterülő elektromosság mennyisége.

Írjuk, mint előbb, a $\rho_s . dO_s$ szorzatot a következő alakban

$$\rho_s dO_s = \frac{f(\theta_s, \psi_s)}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}} d\theta_s d\psi_s, \tag{33}$$

$f(\theta_s, \psi_s)$ mindenesetre kifejthető a $\theta_s$ és $\psi_s$ szerint haladó kettős trigonometrikus sorba. Legyen

$$f(\theta_s, \psi_s) = \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \{K_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + K'_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \sin\mu\psi_s +$$
$$+ K''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + K'''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \sin\psi_s\} = \tag{34}$$
$$= \mathbf{S} \sum_{\mu=0,\nu=0}^{\infty}{}' K_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \cos\mu\psi_s,$$

a hol a $K$ együtthatók a $\theta_s$ és $\psi_s$-től független állandók; a $\Sigma$ előtt álló $S$, mint előbb is (20. lap), csak a kettős trigonometrikus sornak rövidebb jelölésére szolgál, jelezve, hogy a kiírt kettős sor mellé a többi három is veendő, melyek a sinusnak a cosinussal való felcserélése által keletkeznek; a $\Sigma$ melletti vessző pedig azt jelenti, hogy a $\mu=0$ és $\nu=0$-nak megfelelő tagok $\frac{1}{2}$-el szorozva (tehát a $\mu=\nu=0$ tag $\frac{1}{4}$-el) veendők. A $K$ együtthatók mellé tett vesszők csak megkülönböztetésükre szolgálnak. Feladatunk a $K$ együtthatókat meghatározni. Ezt a következő meggondolással végezhetjük.

A gyűrű belsejében uralkodó $V_i$ potencziál két részből tevődik össze: a külső influáló elektromos tömegektől eredő $V_k$ potencziálból és az influenczia folytán a felületen elhelyezkedett elektromos tömegek $V_f$ potencziáljából, e kettő összege $V_i$

$$V_i = V_k + V_f. \tag{35}$$

$V_i$-nek a vezető gyűrű egész belsejében állandónak kell lennie, azaz a gyűrű belsejének bármely $(\sigma_i, \theta_i, \psi_i)$ pontjában függetlennek kell lennie a $\sigma_i$, $\theta_i$, $\psi_i$ koordinátáktól.

Legyen a felület $s$ pontjának távolsága a gyűrű belsejének $i$ pontjától $R_{is}$, recziprok értéke $\frac{1}{R_{is}} = T_{is}$, akkor a felületen elterülő elektromosság potencziálja az $i$ pontban

$$V_f = \int \frac{\rho_s dO_s}{R_{is}} = \int \rho_s T_{is} dO_s, \tag{36}$$

a hol az integráczió a gyűrű egész felületére vonatkozik. Tehát a $K$ együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy adott $V_k$ potencziál mellett a

$$V_i = V_k + \int \rho_s T_{is} dO_s \tag{37}$$

potencziál a gyűrű egész belsejében állandó, a $\sigma_i$, $\theta_i$, $\psi_i$ koordinátáktól független érték maradjon.

Az influáló tömegek potencziálja a gyűrű belsejének $i$ pontjában a II. fejezet (26) egyenlete értelmében

$$V_k = (\sigma_i, \theta_i) \,\mathrm{S} \sum_{\mu=0,\, \nu=0}^{\infty}{}' [a_{\mu\nu} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) + \\ + b_{\mu\nu} Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)] \cos \nu\theta_i \cos \mu\psi_i. \quad (38)$$

Kimutatjuk, hogy $V_k$ *együtthatói az i pontnak pusztán Q függvényeivel fejezhetők ki*, azaz az összes $a$ együtthatók 0-al tehetők egyenlővé.

Vegyük föl, hogy az influáló rendszer egyetlen, a gyűrűn kívül fekvő $a(\sigma_a, \theta_a, \psi_a)$ pontban elhelyezett $e_a$ elektromos tömegből áll. Ennek potencziálja az $i$ pontban,

$$V_{e_a} = \frac{e_a}{R_{ai}} = e_a T_{ai},$$

mivel bármely külső pont esetén

$$\sigma_a < \sigma_i,$$

(l. 16. lap), a (30) egyenlet szerint következőkép állítható elő

$$V_{e_a} = \frac{2e_a(\sigma_a, \theta_a)(\sigma_i, \theta_i)}{k\pi} \sum_{\nu}^{\infty}{}' \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_a)\, Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \times \\ \times \frac{1}{\nu} \cos \nu(\theta_a - \theta_i) \cos \mu(\psi_a - \psi_i) =$$

$$= \frac{2e_a(\sigma_a, \theta_a)(\sigma_i, \theta_i)}{k\pi} \,\mathrm{S} \sum_{\nu,\, \mu=0}^{\infty}{}' P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_a)\, Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \times \\ \times \frac{\cos \nu\theta_a \cos \mu\psi_a}{\nu} \cdot \cos \nu\theta_i \cos \mu\psi_i.$$

Ha a ható rendszer tetszésszerinti számú tömegpontból áll, akkor a potencziál csupa ilyen alakú tagok összege:

$$V_k = \sum_a V_{e_a} =$$

$$= (\sigma_i, \theta_i) \,\mathrm{S} \sum_{\mu,\nu}{}' \left\{ \sum_a \frac{2e_a(\sigma_a, \theta_a)}{k\pi} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_a) \frac{\cos \nu\theta_a \cos \mu\psi_a}{\nu} \right\} \times \\ \times Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos \nu\theta_i \cos \mu\psi_i,$$

ez pedig ismét (38) alakú, a $\theta_i$ és $\psi_i$ szerint haladó kettős trigonometrikus sor, melynek együtthatója azonban a $\sigma_i$-nek csupán $Q$ függvénye, szorozva a $\sigma_i$-tól nem függő állandókkal. Ha végűl a ható elektromos tömegek a térben folytonos módon vannak eloszolva tetszőleges felületeken és térben (a gyűrűn kivül), akkor a potencziál a $V_{e_\alpha}$-nak e felületekre és térre vonatkozó integrálja, hol ekkor $e_\alpha$ helyett az $\varepsilon_f$ felületi és $\varepsilon_\tau$ térbeli sűrűség lép fel:

$$V_k' = (\sigma_i, \theta_i) \mathrm{S} \sum_{\mu,\nu} \left\{ \int \frac{2\varepsilon_f(\sigma_f, \theta_f)}{k\pi} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_f) \frac{\cos\nu\theta_f \cos\mu\psi_f}{\nu} df + \right.$$

$$\left. + \int \frac{2\varepsilon_\tau(\sigma_\tau, \theta_\tau)}{k\pi} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_\tau) \frac{\cos\nu\theta_\tau \cos\mu\psi_\tau}{\nu} d\tau \right\} \times$$

$$\times Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos\nu\theta_i \cos\mu\psi_i,$$

ugyancsak a (38) alakú kifejezés, ha abban minden $a$ együtthatót 0-al teszünk egyenlővé.

Ezzel ki van mutatva, hogy a gyűrűn kivül fekvő tetszőleges elektromos tömegek $V_k$ potencziálja a gyűrű belsejében következő alakban állítható elő

$$V_k = (\sigma_i, \theta_i) \mathrm{S} \sum_{\mu=0,\nu=0}^{\infty}{}' b_{\mu\nu} Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos\nu\theta_i \cos\mu\psi_i, \quad (39)$$

a hol a $b_{\mu\nu}$ már a $\theta_i$, $\psi_i$, $\sigma_i$ egyikének se függvénye.

Ezután még az

$$\int \rho_s T_{is} dO_s$$

kifejezést kell kiszámitanunk. A $\rho_s dO_s$ szorzatot a (33) és (34) egyenletek szolgáltatják, a $T_{is}$ pedig, mivel $\sigma_i > \sigma_s$, a (30) egyenlet értelmében

$$T_{is} = \frac{2(\sigma_i, \theta_i)(\sigma_s, \theta_s)}{k\pi} \sum_{\nu}^{\infty}{}' \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \times$$

$$\times \frac{1}{\nu} \cos\nu(\theta_i - \theta_s) \cos\mu(\psi_i - \psi_s) =$$

$$= \frac{2(\sigma_i, \theta_i)(\sigma_s, \theta_s)}{k\pi} \mathrm{S} \sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \times$$

$$\times \frac{\cos\nu\theta_i \cos\mu\psi_i}{\nu} \cos\nu\theta_s \cos\mu\psi_s,$$

tehát, mivel $(\sigma_s, \theta_s)$-el a kifejezés rövidül,

$$\int \rho_s T_{is} dO_s = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{2(\sigma_i, \theta_i)}{k\pi} \mathrm{S} \sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) \times \right.$$

$$\left. \times\, Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \frac{\cos \nu\theta_i \cos \mu\psi_i}{\nu} \cos \nu\theta_s \cos \mu\psi_s \right\} \times$$

$$\times \left\{ \mathrm{S} \sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' K_{\mu\nu} \cos \nu\theta_s \cos \mu\psi_s \right\} d\theta_s d\psi_s.$$

Az integrandusz két kettős trigonometrikus sor szorzata, tehát a beszorzást elvégezve 16 négyszeres sort kapunk, azonban az integráczió végrehajtásával ezek egyetlen kettős trigonometrikus ($S\Sigma$ alakú) sorra redukálódnak. Ugyanis a beszorzással keletkező sorok elseje, ha a $\theta_s$, $\psi_s$-től független részt (együtthatókat) az első tényezőben rövidség kedvéért $A_{\mu_1\nu_1}$-el jelöljük, a $\mu$ és $\nu$-t úgy ezekben, mint a cosinus és sinus argumentumában külön indexxel látva el annak jelölésére, hogy a két sor szorzatában az összegezés mindegyik szerint külön veendő, következő:

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}{}' \sum_{\mu_1=0}^{\infty}{}' \sum_{\nu_2=0}^{\infty}{}' \sum_{\mu_2=0}^{\infty}{}' A_{\mu_1\nu_1} K_{\mu_2\nu_2} \cos \nu_1\theta_s \cos \mu_1\psi_s \cos \nu_2\theta_s \cos \mu_2\psi_s,$$

melyből a többi 15 sor a cosinusnak sinussal való felcserélése által nyerhető. Ezek integrálját a következő ismeretes formulák alapján határozhatjuk meg

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{«} \quad m = n, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad m \neq n, \\ \pi, & \text{«} \quad m = n, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

Ezeket tekintetbe véve könnyen belátható, hogy a 16 négyszeres sorból csak az a négy nem 0, melyben ugyanannak a szögnek csak egyenlő függvényei fordulnak elő, s azokból is csak azok a tagok maradnak meg, melyekben

$$\mu_1 = \mu_2, \quad \nu_1 = \nu_2,$$

tehát az egész a következő négy kettős sorra redukálódik:

$$\sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} A_{\mu\nu}K_{\mu\nu}\cos^2\nu\theta_s\cos^2\mu\psi_s d\theta_s\, d\psi_s = \pi^2 \sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' A_{\mu\nu}K_{\mu\nu}$$

$$\sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} A'_{\mu\nu}K'_{\mu\nu}\cos^2\nu\theta_s\sin^2\mu\psi_s d\theta_s\, d\psi_s = \pi^2 \sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' A'_{\mu\nu}K'_{\mu\nu}$$

$$\sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} A''_{\mu\nu}K''_{\mu\nu}\sin^2\nu\theta_s\cos^2\mu\psi_s d\theta_s\, d\psi_s = \pi^2 \sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' A''_{\mu\nu}K''_{\mu\nu}$$

$$\sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} A'''_{\mu\nu}K'''_{\mu\nu}\sin^2\nu\theta_s\sin^2\mu\psi_s d\theta_s\, d\psi_s = \pi^2 \sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' A'''_{\mu\nu}K'''_{\mu\nu},$$

a hol

$$A_{\mu\nu} = \frac{2\,(\sigma_i,\ \theta_i)}{k\pi}\,\frac{P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\,Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)}{\nu}\cos\nu\theta_i\cos\mu\psi_i,$$

s a vesszős $A$-kat a cosinusnak sinussal való megfelelő felcserélése által nyerjük. Tehát végül

$$\int \rho_s T_{is} dO_s =$$

$$= \frac{2\pi}{k}(\sigma_i,\ \theta_i)\,\mathbf{S}\sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \frac{K_{\mu\nu}}{\nu} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\,Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i\cos\mu\psi_i.$$

Ezt és $V_k$-nak (39) alatti kifejezését $V_i$-nek (37) alatti egyenletébe helyettesítve

$$V_i = V_k + V_f =$$

$$= (\sigma_i,\ \theta_i)\,\mathbf{S}\sum_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \Big\{ \frac{2\pi}{k}\frac{K_{\mu\nu}}{\nu} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\,Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) +$$

$$+ b_{\mu\nu}Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}\cos i\sigma_i)\Big\}\cos\nu\theta_i\cos\mu\psi_i,$$

s ennek állandónak kell lennie a gyűrű egész belsejében. Tehát a $K_{\mu\nu}$ együtthatókat úgy kell meghatározni, hogy a jobboldal független legyen $\sigma_i$, $\theta_i$, $\psi_i$-től.

A $(\sigma_i, \theta_i)$ tényező kifejthető a $\theta_i$ többszöröseinek cosinusa szerint haladó sorba. Ugyanis a (29) alatti egyenlőség értelmében

$$\frac{1}{(\sigma_i, \theta_i)} = \frac{1}{\sqrt{\cos i\sigma - \cos\theta}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \cos\nu\theta_i, \tag{40}$$

s innen

$$(\sigma_i, \theta_i) = \sqrt{\cos i\sigma_i - \cos\theta_i} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i}, \tag{41}$$

ezt $V_i$-nek fenti egyenletébe helyettesítve, s egyúttal expliczite kiírva a négy kettős sort, melyet az $S$ jelent, mivel ezentúl mindegyiket külön kell tárgyalni

$$V_i = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\sum\limits_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \left[\frac{2\pi}{k}\frac{K_{\mu\nu}}{\nu} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) + b_{\mu\nu} Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\right] \cos\nu\theta_i \cos\mu\psi_i}{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta^i} + \right.$$

$$+ \frac{\sum\limits_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \left[\frac{2\pi}{k}\frac{K'_{\mu\nu}}{\nu} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) + b'_{\mu\nu} Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\right] \cos\nu\theta_i \sin\mu\psi_i}{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma^i)\cos\nu\theta} +$$

$$+ \frac{\sum\limits_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \left[\frac{2\pi}{k}\frac{K''_{\mu\nu}}{\nu} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) + b''_{\mu\nu} Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma i)\right] \sin\nu\theta_i \cos\mu\psi_i}{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i} +$$

$$\left. + \frac{\sum\limits_{\mu,\nu}^{\infty}{}' \left[\frac{2\pi}{k}\frac{K'''_{\mu\nu}}{\nu} P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) + b'''_{\mu\nu} Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\right] \sin\nu\theta_i \sin\mu\psi_i}{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i} \right\},$$

röviden jelölve

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \{f_1 + f_2 + f_3 + f_4\}. \tag{42}$$

Hogy $V_i$ állandó legyen, ezen $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ tagok mindegyikének, mint trigonometrikus soroknak, külön-külön állandónak kell lennie. Vizsgáljuk ezeket sorra. $f_1$-et következőkép is írhatjuk

$$f_1 = \frac{\sum_{\mu}^{\infty}{}' \left\{ \sum_{\nu}^{\infty}{}' \left[ \frac{2\pi}{k} \frac{K_{\mu\nu}}{\nu} P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) \right.\right.}{\sum_{\nu}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i} +$$

$$+ \frac{\left.\left. b_{\mu\nu} Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\right]\cos\nu\theta_i \right\}\cos\mu\psi_i}{\sum_{\nu}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i}.$$

Hogy ez $\psi_i$-től független legyen, kell hogy a $\cos\mu\psi_i$ szerint haladó sor minden egyes tagjának együtthatója, vagyis a $\{\ \}$-ben álló kifejezés minden $\mu$ esetén, kivéve a $\mu=0$ értéket, 0 legyen:

$$\sum_{\nu}^{\infty}{}' \left[ \frac{2\pi}{k} \frac{K_{\mu\nu}}{\nu} P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) + \right.$$

$$\left. + b_{\mu\nu} Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\right]\cos\nu\theta_i = 0\,;$$

de ez ismét, mint $\theta_i$ trigonometrikus sora, csak akkor lesz 0, ha minden egyes együttható $= 0$, még pedig minden $\nu$ érték mellett, tehát

$$\frac{2\pi}{k} \frac{K_{\mu\nu}}{\nu} P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\, Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) + b_{\mu\nu} Q_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) = 0,$$

s innen

$$K_{\mu\nu} = -\frac{k}{2\pi} \frac{\nu b_{\mu\nu}}{P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}, \quad \begin{matrix}\mu=1,2,3,\ldots\\ \nu=0,1,2,\ldots\end{matrix} \qquad (43)$$

s ezzel mindazon $K_{\mu\nu}$ együtthatók, melyekben $\mu \neq 0$, meg vannak határozva. Hasonlóan kapjuk $f_2$, $f_3$ és $f_4$-ből $\mu$ és $\nu$ ugyanazon értékeire

$$\begin{aligned} K'_{\mu\nu} &= -\frac{k}{2\pi} \frac{\nu b'_{\mu\nu}}{P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}, \\ K''_{\mu\nu} &= -\frac{k}{2\pi} \frac{\nu b''_{\mu\nu}}{P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}, \\ K'''_{\mu\nu} &= -\frac{k}{2\pi} \frac{\nu b'''_{\mu\nu}}{P_{\mu}^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}. \end{aligned} \qquad (43)$$

Hátra vannak még a $V_i$ azon tagjai, melyekben $\mu=0$. Ezek a (42)-ből a következők:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}'\left[\frac{2\pi}{k}\frac{K_{0\nu}}{\nu}P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\,Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)+b_{0\nu}Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\right]\cos\nu\theta_i}{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}'\,Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}'\left[\frac{2\pi}{k}\frac{K''_{0\nu}}{\nu}P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\,Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)+b''_{0\nu}Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\right]\sin\nu\theta_i}{\sum\limits_{\nu}^{\infty}{}'\,Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i}\right\},$$

röviden jelölve

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\{f_{01}+f_{03}\}.$$

Az $f_{03}$, mivel a számláló $\sin\nu\theta_i$, a nevező pedig $\cos\nu\theta_i$ szerint haladó sor, ismét csak úgy lehet állandó, ha a számláló, s következőleg minden egyes $\sin\nu\theta_i$ tag együtthatója 0,

$$\frac{2\pi}{k}\frac{K''_{0\nu}}{\nu}P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\,Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)+b''_{0\nu}Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)=0,$$

s innen

$$K''_{0\nu}=-\frac{k}{2\pi}\frac{\nu b''_{0\nu}}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}. \qquad (44)$$

$$(\nu=0,1,2,\ldots)$$

Az $f_{01}$-re ezt a meggondolást nem alkalmazhatjuk, mert akkor a $V_i$ potencziál $=0$ volna, míg $V_i$-re csakis az a feltétel, hogy állandó legyen és általában a 0-tól különböző érték. Azonban $f_{01}$, mivel úgy a számlálója, mint nevezője $\cos\nu\theta_i$ szerint haladó sor, úgy is lehet állandó, hogy a számlálóban levő sor arányos a nevezőben levővel; de ez, mint a trigonometrikus sorok elméletéből ismeretes, csak úgy lehetséges, ha az egyik sor tagjai a másik sor megfelelő tagjaitól csak egy ugyanazon állandó ($\sigma_i$, $\theta_i$, $\psi_i$-tól független) arányossági tényezőben különböznek. Jelöljük ezt az arányossági tényezőt $\varkappa$-val, akkor tehát a következő egyenletnek kell fennállni a minden $\nu=0, 1, 2, \ldots$ mellett:

$$\frac{2\pi}{k}\frac{K_{0\nu}}{\nu}P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\,O_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)+$$
$$+\,b_{0\nu}Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)=\varkappa Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i).$$

A (31) szerint $O^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma)$ a $Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma)$-tól csak egy állandó tényezőben különbözik, ezt röviden $C_\nu$-vel jelölve

$$Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)=C_\nu Q_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i),$$

hol

$$C_\nu=\frac{\pi}{2^{\nu+\frac{1}{2}}}\,\frac{1.3\ldots(2\nu-1)}{2.4\ldots(2\nu)}; \tag{45}$$

e szerint előbbi egyenletünk következőkép egyszerűsbül

$$\frac{2\pi}{k}\frac{K_{0\nu}}{\nu}P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)+b_{0\nu}=\varkappa C_\nu$$

s innen

$$K_{0\nu}=\varkappa\frac{k}{2\pi}\frac{\nu C_\nu}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}-\frac{k}{2\pi}\frac{\nu b_{0\nu}}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}, \tag{46}$$
$$(\nu=0, 1, 2, \ldots)$$

megjegyezve, hogy mivel $\nu$ a $T$ kifejezéséből származott ide, itt is úgy mint a $T$ képletében (30), $\nu=0$ esetén a $\nu$ *tényező* helyébe 1 irandó.

Ezzel az összes $K$ együtthatók, a $\varkappa$-tól eltekintve, meg vannak határozva. Összehasonlítva ezeknek (43), (44) és (46) alatti kifejezéseit látjuk, hogy a $K_{0\nu}$ együtthatók kivételével valamennyi következő alakú

$$K_{\mu\nu}=-\frac{k}{2\pi}\frac{\nu b_{\mu\nu}}{P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)},$$

s a $K_{0\nu}$ is csak abban különbözik, hogy ezen kifejezéshez még egy addendus tag járul.

Még a $\varkappa$ arányossági tényező határozatlan $K_{0\nu}$ kifejezésében. Ezt következőkép határozhatjuk meg. A gyűrűnek feltételünk szerint eredetileg nincs szabad töltése; a gyűrűn elterülő elektromosság mennyiségét, azaz a gyűrű töltését az

$$\int \rho_s dO_s \tag{47}$$

kifejezés adja, hol az integráczió a gyűrű egész felületére vonatkozik; ennek tehát feltételünk értelmében 0-nak kell lenni

$$\int \rho_s dO_s = 0.$$

Helyettesítsük ebbe $\rho_s dO_s$-nek (33) és (34) alatti értékét és írjuk a következő három részre bontva

$$\int \rho_s dO_s =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{(\sigma_s,\ \theta_s)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \{K_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + K'_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \sin\mu\psi_s +$$

$$+ K''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + K'''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \sin\mu\psi_s\}\, d\theta_s d\psi_s +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{(\sigma_s,\ \theta_s)} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} \cos\nu\theta_s d\theta_s d\psi_s +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{(\sigma_s,\ \theta_s)} \sum_{\nu=1}^{\infty} K''_{0\nu} \sin\nu\theta_s d\theta_s d\psi_s,$$

röviden jelölve

$$= I_1 + \tfrac{1}{2} I_2 + \tfrac{1}{2} I_3.$$

$I_1$-ben az integrácziót elvégezve minden tag 0-t ád eredményül. Ugyanis

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} K_{\mu\nu} \frac{\cos\nu\theta_s \cos\mu\psi_s}{(\sigma_s,\ \theta_s)} d\theta_s d\psi_s =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{\mu\nu} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos\nu\theta_s}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}} d\theta_s \int_0^{2\pi} \cos\mu\psi_s d\psi_s = 0,$$

mert

$$\int_0^{2\pi} \cos\mu\psi_s d\psi = \int_0^{2\pi} \sin\mu\psi_s d\psi_s = 0, \qquad \begin{matrix}\mu=1,2,3,\ldots\\ \mu\neq 0\end{matrix}$$

hasonlóan $=0$ az $I_1$-ben foglalt többi három sor is.

$$I_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos\nu\theta_s}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}}\, d\theta_s d\psi_s =$$

$$= 2\pi \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos\nu\theta_s d\theta_s}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}}.$$

A (29) szerint

$$\frac{1}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)\cos\nu\theta_s, \tag{48}$$

ezt $\cos\nu\theta_s d\theta_s$-el szorozva és $-\pi$-től $+\pi$-ig integrálva, a 33. lapon előforduló integrálképlet értelmében

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos\nu\theta_s d\theta_s}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}} = 2\sqrt{2}\, Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s),$$

tehát

$$I_2 = 4\pi\sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s).$$

Végül

$$I_3 = \sum_{\nu=1}^{\infty} K''_{0\nu} \int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\nu\theta_s}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}}\, d\theta_s d\psi_s =$$

$$= 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} K''_{0\nu} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\nu\theta_s d\theta_s}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}} = 0,$$

mert (48)-ból

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin\nu\theta_s d\theta_s}{\sqrt{\cos i\sigma_s - \cos\theta_s}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{\nu_1=0}^{\infty}{}' Q^{\nu_1-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) \int_{-\pi}^{+\pi} \cos\nu_1\theta_s \sin\nu_2\theta_s d\theta_s = 0, \quad (\nu_2 \neq 0)$$

ugyancsak a 37. lapon idézett integráltételek értelmében.

Ezeket (47)-be behelyettesítve

$$\int \rho_s dO = 2\pi\sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) = 0,$$

$K_{0\nu}$-nek (46) alatti értékét behelyettesítve

$$\int \rho_s dO_s = 2\pi \sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \left[ \varkappa \frac{k}{2\pi} \frac{\nu C_\nu}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{2\pi} \frac{\nu b_{0\nu}}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} \right] Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) =$$

$$= k \sqrt{2} \left[ \varkappa \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu C_\nu \frac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} - \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu b_{0\nu} \frac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} \right] = 0;$$

innen

$$\varkappa = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu b_{0\nu} \dfrac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu C_\nu \dfrac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}}, \tag{49}$$

hol $\nu$-re ugyanaz a megjegyzés érvényes, mint a 38. lapon. Ezzel a $\rho_s dO_s$ összes együtthatói teljesen meg vannak határozva.

Ismerve a $K$ együtthatókat, a $\rho_s$ sűrűség a (33) egyenletből rögtön adódik. Ugyanis (32) szerint

$$dO_s = -\frac{ik^2 \sin i\sigma_s}{(\sigma_s, \theta_s)^4} d\theta_s d\psi_s;$$

oszszuk ezzel a (33) egyenletet, akkor végre kapjuk a megosztott elektromosság keresett sűrűségét a gyűrű felületének valamely $(\theta_s, \psi_s)$ pontjában:

$$\rho_s = -\frac{(\sigma_s, \theta_s)^3}{ik^2 \sin i\sigma_s} \mathbf{S} \sum_{\mu=0,\, \nu=0}^{\infty} K_{\mu\nu} \cos \nu\theta_s \cos \mu\psi_s.$$

Ezek után eredményeinket következő tételbe foglalhatjuk össze.

*Ha egy szigetelő közegben elhelyezett körgyűrű alakú vezető, melynek nincs szabad elektromos töltése, tetszőleges külső elektromos tömegek hatása alatt áll, melyeknek potencziálja a gyűrű belsejében,*

$$V_k = (\sigma_i, \theta_i) \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i) [b_{\mu\nu} \cos \nu\theta_i \cos \mu\psi_i +$$

$$+ b'_{\mu\nu} \cos \nu\theta_i \sin \mu\psi_i + b''_{\mu\nu} \sin \nu\theta_i \cos \mu\psi_i +$$

$$+ b'''_{\mu\nu} \sin \nu\theta_i \sin \mu\psi_i],$$

*akkor a gyűrű felületén ezek hatása alatt influált elektromosság $\rho_s$ sűrűsége a felület bármely $(\theta_s, \psi_s)$ pontjában következőképen fejezhető ki:*

$$\rho_s = -\frac{(\cos i\sigma_s - \cos\theta_s)^{\frac{3}{2}}}{ik^2 \sin i\sigma_s} \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \{K_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + K'_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \sin\mu\psi_s + K''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + K'''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \sin\mu\psi_s\}, \tag{50}$$

*hol*

$$K_{\mu\nu} = -\frac{k}{2\pi} \frac{\nu b_{\mu\nu}}{P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)},\text{[1]}$$

*ha*

$$\mu \neq 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

*a vesszős K együtthatókat pedig ebből ugyanazon $\mu$ és $\nu$-re b-nek a megfelelő vesszős b-vel való felcserélése által nyerjük és a $\mu=0$-nak megfelelő együtthatók*

$$K''_{0\nu} = -\frac{k}{2\pi} \frac{\nu b''_{0\nu}}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)},$$

$$K_{0\nu} = \varkappa \frac{k}{2\pi} \frac{\nu C_\nu}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} - \frac{k}{2\pi} \frac{\nu b_{0\nu}}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)},$$

$$(\nu=0, 1, 2, \ldots).$$

*Az utóbbiban*

$$\varkappa = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu b_{0\nu} \dfrac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu C_\nu \dfrac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}},$$

$$C_\nu = \frac{\pi}{2^{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2\nu-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2\nu-2)}.$$

$P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}$ és $Q_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}$ az I. és II. fejezetben tárgyalt függvények.

## V. Az elektromosság elhelyezkedése, ha a gyűrűnek szabad töltése van.

Az előbbi fejezetben nyert eredményekről könnyen rátérhetünk arra az esetre, midőn a külső elektromos tömegek hatása

[1] A $\nu=0$ esetre l. a 38. lapon tett megjegyzést.

alatt álló gyürűnek szabad töltése is van. Könnyen belátható, hogy ez az eset is teljesen ugyanazon gondolatmenettel oldható meg, mint az előbbi, különbség csakis abban van, hogy az

$$\int \rho_s dO_s = 0$$

feltétel helyébe, ha a gyűrű szabad töltését $E$-vel jelöljük, az

$$\int \rho_s dO_s = E \tag{51}$$

feltétel lép. A külső hatóktól eredő $V_k$ potencziál s a felületen elhelyezkedett összes, szabad és az influenczia folytán keletkezett elektromosság $V_f$ potencziálja összegének

$$V = V_k + V_f$$

a gyűrű egész belsejében a jelen esetben is állandónak kell lennie, s az előbbi fejezet további eljárása is pontról-pontra alkalmazható, úgy hogy a $K$ együtthatókat, mint könnyű belátni, ugyanazok a kifejezések szolgáltatják, mint az előbbi esetben. Tehát most is

$$\begin{aligned}\rho_s = -\frac{(\cos i\sigma_s - \cos\theta_s)^{\frac{3}{2}}}{ik^2 \sin i\sigma_s} \sum_{\mu=0}^{\infty}{}' \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \{ & K_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + \\ & + K'_{\mu\nu} \cos\nu\theta_s \sin\mu\psi_s + K''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \cos\mu\psi_s + \\ & + K'''_{\mu\nu} \sin\nu\theta_s \sin\mu\psi_s \},\end{aligned} \tag{52}$$

hol

$$K_{\mu\nu} = -\frac{k}{2\pi} \frac{\nu b_{\mu\nu}}{P_\mu^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}, \tag{53}$$

minden esetben, a következők kivételével:

$$K_{0\nu} = \varkappa \frac{k}{2\pi} \frac{\nu C_\nu}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} - \frac{k}{2\pi} \frac{\nu b_{0\nu}}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}. \tag{54}$$

Különbség csakis ott jelentkezik, a hol az (51) alatti feltétel jő tekintetbe, vagyis a $\varkappa$ arányossági tényező meghatározásánál. Az (51) baloldalán levő integrál értéke most is ugyanaz, mint az előbbi fejezetben

$$\int \rho_s dO_s = 2\pi\sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s).$$

Ezt az (51) egyenletbe helyettesítve s ebbe $K_{0\nu}$ fenti értékét téve

$$\int \rho_s dO_s = 2\pi \sqrt{2} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s) =$$

$$= k\sqrt{2}\left[\varkappa \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu C_\nu \frac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} - \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu b_{0\nu} \frac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}\right] = E,$$

s innen

$$\varkappa = \frac{\dfrac{E}{k\sqrt{2}} + \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu b_{0\nu} \dfrac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu C_\nu \dfrac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}}. \tag{55}$$

Mint látjuk, $\varkappa$ is csak annyiban változott, hogy egy addendus tag járult hozzá.

Részletezzük egy kissé most nyert általános eredményünket.

1. Ha $E=0$, azaz a gyűrűnek nincs szabad töltése, akkor $\varkappa$ a (49) alatti értékre redukálódik és így az előbbi fejezet eredményét kapjuk.

2. Ha ellenben a gyűrűnek van 0-tól különböző $E$ töltése, de semmiféle külső erő nem hat rá, (ez a Neumann által tárgyalt eset), azaz $V_k$ az egész térben 0, vagyis minden $b$ együttható 0, akkor a $K$ együtthatók következőkép redukálódnak: minden $\mu \neq 0$ értékre

$$K_{\mu\nu} = K'_{\mu\nu} = K''_{\mu\nu} = K'''_{\mu\nu} = 0,$$

hasonlóan

$$K''_{0\nu} = 0$$

és

$$K_{0\nu} = \varkappa \frac{k}{2\pi} \frac{\nu C_\nu}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}, \tag{56}$$

hol

$$\varkappa = \frac{E}{k\sqrt{2} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}{}' \nu C_\nu \dfrac{Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}}.$$

Ekkor tehát a sűrűség (52) alatti kifejezéséből egyedül a $\cos \nu\theta_s$ szerint haladó tagok maradnak meg:

$$\rho_s = -\frac{(\cos i\sigma_s - \cos\theta_s)^{\frac{3}{2}}}{ik^2 \sin i\sigma_s} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} \cos \nu\theta_s,$$

hol $K_{0\nu}$ értéke az (56) alatti. Ez tehát a sűrűség, mely a gyűrűvel közölt $E$ elektromos töltés elhelyezkedését szolgáltatja, egyensúly esetén, ha semmiféle külső erő nem hat reá, s ez teljesen megegyezik NEUMANN-nak 30-ik lapon közölt eredményével.

Az 1. és 2. eset összehasonlítása nevezetes tételt szolgáltat, mely ugyan általánosan, tetszésszerinti vezető esetére is érvényes, s azért csak támogatja eredményeink helyességét. A 2. esetben $\rho_s$ általános, (52) alatti kifejezéséből, melynek együtthatóit (53), (54) és (55) szolgáltatják, mindazok a tagok kiesnek, melyek az 1. esetben megvannak és mindazon tagjai az általános esetnek megmaradnak, melyek az 1. esetben hiányoznak. E szerint a $\rho_s$ általános, (52), (53), (54) és (55)-el meghatározott kifejezését úgy foghatjuk fel, hogy az két önálló részből tevődik össze, nevezetesen a megosztás folytán keletkezett elektromosság $\rho_1$ sűrűségéből és a szabad töltés $\rho_2$ sűrűségéből:

$$\rho_s = \rho_1 + \rho_2,$$

melyek egymástól függetlenül helyezkednek el a gyűrű felületén. Tehát a két töltés egymásra szuperponálódik, vagyis a szabad töltés egyformán helyezkedik el, akár éri külső hatás a gyűrűt, akár nem, és fordítva.

## VI. Alkalmazás.

Eredményeinket egy egyszerű speciális esetre alkalmazzuk, mely azoknak támogatására szolgálhat.

*Legyen a megosztó rendszer egyetlen, a gyűrű geometriai tengelyében, vagyis a Z tengelyben fekvő e elektromos tömegpont.* Ennek potencziálja a gyűrű belsejének egy $i$ pontjában

$$V_k = \frac{e}{R_{ei}} = eT_{ei}, \tag{57}$$

hol $R_{ei}$ az $e$ és $i$ pontok egymástól való távolsága. Legyenek az $e$ pontnak (egyszerűség kedvéért azt a pontot is, hol az

$e$ elektromos tömeg helyet foglal, $e$-vel jelöljük), koordinátái $(\sigma_e, \theta_e, \psi_e)$, akkor

$$\sigma_e = 0,$$

és $\psi$-től az $e$ pont független. Ezek szerint $T$-nek (28) alatti kifejezése következőkép egyszerűsbül

$$T_{ei} = \frac{\sqrt{1-\cos\theta_e}}{k\sqrt{2}}(\sigma_i, \theta_i)\frac{1}{\sqrt{\cos i\sigma_i - \cos(\theta_e - \theta_i)}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{1-\cos\theta_e}}{k\pi}(\sigma_i, \theta_i)\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu(\theta_e - \theta_i),$$

(29) szerint.

A felvett esetet még tovább speczializáljuk. *Legyen az e elektromos tömegpont a gyűrű geometriai középpontjában*, azaz a koordinátarendszer $A$ kezdőpontjában. Akkor

$$\theta_e = \pi,$$

tehát

$$T_{ei} = \frac{2\sqrt{2}}{k\pi}(\sigma_i, \theta_i)\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'(-1)^{\nu}Q^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_i)\cos\nu\theta_i.$$

Ezt (57)-be behelyettesítve és összehasonlítva a külső hatók (39) alatti $V_k$ potencziáljával, látjuk, hogy a jelen esetben minden $\mu \neq 0$ értékre

$$b_{\mu\nu} = b'_{\mu\nu} = b''_{\mu\nu} = b'''_{\mu\nu} = 0,$$

úgyszintén

$$b''_{0\nu} = 0,$$

és

$$b_{0\nu} = (-1)^{\nu}\frac{2\sqrt{2}}{k\pi}e;$$

tehát (43), (44) és (46) szerint minden $\mu \neq 0$-ra

$$K_{\mu\nu} = K'_{\mu\nu} = K''_{\mu\nu} = K'''_{\mu\nu} = 0,$$

$$K''_{0\nu} = 0,$$

$$K_{0\nu} = \varkappa\frac{k}{2\pi}\frac{\nu C_{\nu}}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)} + (-1)^{\nu+1}\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\frac{\nu e}{P_0^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos i\sigma_s)}.$$

E szerint $\rho_s$ a következő egyszerű kifejezésre redukálódik

$$\rho_s = -\frac{(\cos i\sigma_s - \cos\theta_s)^{\frac{3}{2}}}{ik^2 \sin i\sigma_s} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} \cos \nu\theta_s . \tag{58}$$

Mint látjuk, $\rho_s$ független $\psi$-től és $\theta_s$-nek csak cosinusai szerint haladó sorát tartalmazza. Ennek jelentése, hogy a $\rho_s$ sűrűség minden $\psi_s$=const. meridiánkör mentén ugyanaz, s azonfelül $+\theta_s$ és $-\theta_s$ értékre is egyenlő, vagyis az $xy$ síkra szimmetrikus. Ez, tekintve az $e$ influáló tömegpont szimmetrikus fekvését a gyűrűre nézve, természetes is.

Az (58) egyenletből a maximális és minimális $\rho_s$ sűrűség helyeit is meghatározhatjuk. A $\rho_s$-nek ott lesz szélső értéke, a hol a $\theta_s$ szerinti első differencziálhányadosa 0,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho_s}{\partial\theta_s} = &-\frac{3}{2}\,\frac{(\cos i\sigma_s - \cos\theta_s)^{\frac{1}{2}}}{ik^2 \sin i\sigma_s} \sin\theta_s \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' K_{0\nu} \cos\nu\theta_s + \\
&+ \frac{(\cos i\sigma_s - \cos\theta_s)^{\frac{3}{2}}}{ik^2 \sin i\sigma_s)} \sum_{\nu=0}^{\infty} K_{0\nu}\nu \sin\nu\theta_s = \\
= &-\frac{(\cos i\sigma_s - \cos\theta_s)^{\frac{1}{2}}}{ik^2 \sin i\sigma_s} \sum_{\nu=0}^{\infty} [\tfrac{3}{2} K_{0\nu} \sin\theta_s \cos\nu\theta_s - \\
&- K_{0\nu}\,\nu \,.\, \cos i\sigma_s \sin\nu\theta_s + K_{0\nu}\,\nu \cos\theta_s \sin\nu\theta_s] \,;
\end{aligned}$$

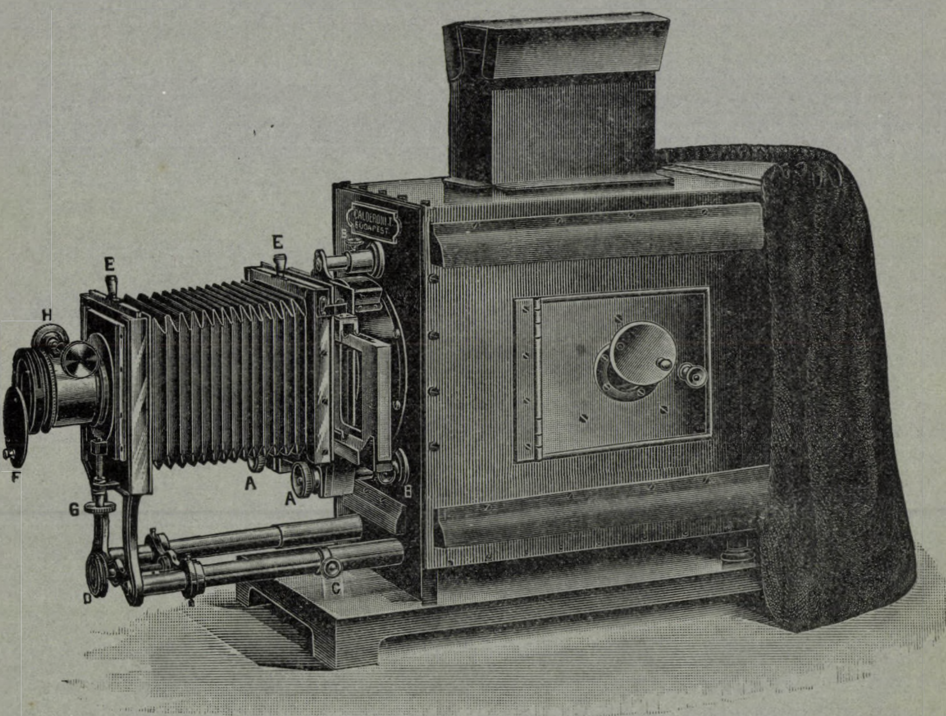
ez pedig a $\theta_s=0$ és $\theta_s=\pi$ értékre 0, mert ekkor a $\Sigma$ minden egyes tagja 0. Tehát a maximális és minimális sűrűség a $\theta_s=0$ és $\theta_s=\pi$ körök mentén, vagyis a gyűrűnek az $xy$ síkkal való metszetében terül el.

*Koren Dénes.*

# Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

*Budapest, IV., Váci-utca 50.*

## Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.




## Vetitőkészülék «Calderoni I»

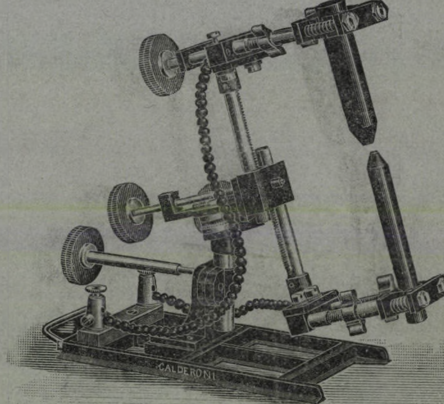
Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü acéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivül vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készitett védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készitett objektivet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állitható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K 260.—

# Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.




**Elektromos ívlámpa** legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—

**Elektromos ívlámpa** egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

**Borszesz-izzófénylámpa** légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

**Háromlábu asztalállvány,** mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110**.—

**Vetitési ernyő** finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

**Ernyő-állvány** fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30**.—

**Vetitési ernyők** zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

| | 200 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 cm. négyzetben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ára | **45**.— | **65**.— | **90**.— | **145**.— | **200**.— | **240**.— korona. |

**Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.**

*Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.*

Franklin-Társulat nyomdája

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENKILENCZEDIK ÉVFOLYAM

III. FÜZET 1910 MÁRCZIUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1910.

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A tizenkilenczedik társulati év 1910 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János-utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért*.

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

*Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.*

**Rendes ülések.** A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

*Igen tisztelt munkatársainkat* értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

---

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

# A NYOMÁSGÖRBE-BOLTOZATOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

## I.

Nyomásgörbe-boltozatoknak kivánjuk azon ívtartó alakokat nevezni, a hol a külső erők kötélpoligonja egybeesik a boltozat szilárdsági tengelyével.

Ezen boltozati alakoknak kiváló fontosságuk van anyagtakarítás szempontjából. Ismeretes ugyanis, ha a külső erők kötélpoligonjának megfelelőképen van alakítva a boltozat, hajlítások csak másodrendű erőhatások következtében lépnek fel (összenyomódás, hőtágulás).

A boltozatokban fellépő igénybevétel, bármily keresztmetszetben, mint ismeretes

$$\sigma = \frac{R}{F} \pm \frac{Re}{k}.$$

A hol $R$ az illető keresztmetszetre működő külső erők eredője, $e$ a külső erők eredőjének merőleges távolsága a keresztmetszet súlypontjától, $F$ a keresztmetszet területe, $k$ a keresztmetszeti modulus.

Az igénybevétel relativ minimum lesz, ha

$$\frac{Re}{k} = 0.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha

$$e = 0.$$

Ezekből következik, hogy relativ minimális igénybevétel csak akkor lehet a boltozatban, ha hajlítónyomaték nincsen, vagyis a külső erők kötélpoligonja egybeesik a boltozat szilárdsági tengelyével. Vagy viszont, a mondottakból következik, hogy a boltozat minimális méretekkel épülhet, ha a fenti feltételt betartjuk.

A minimális igénybevételre, vagy a minimális anyagszükségletre mondottak érvényesek, a reakcziók statikailag határozott vagy határozatlansága szempontjából bárhogy alakított boltozatra, azzal a megszorítással, hogy — a mint ismeretes — a háromcsuklós ívnél az összenyomódásból és hőváltozásból igénybevételek nem származnak.

Tárgyalásunk keretébe a terhelések szempontjából oly boltozatokat óhajtunk felvenni, a melyeknél:

1. a terhelés állandó, vagy a mozgó terhelés lényegtelenül változtatja meg feltételeinket;

2. a terhelő anyag a földnyomás általánosan ismert törvényei szerint működik, vagyis a terhelésnek van vertikális és vízszintes komponense. Úgy a vertikális, mint a vízszintes komponensek a nyomó magasság ($y$) lineáris függvényei.

A fenti feltételek algebrai alakban kifejezve lesznek:

a felületegységre eső vertikális nyomás:

$$v = \gamma y \tag{1}$$

a felületegységre eső vízszintes nyomás:

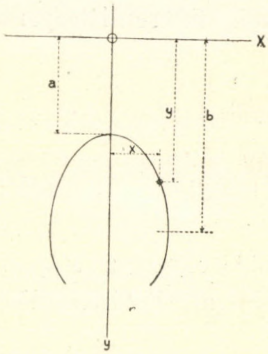
$$h = \beta \gamma y. \tag{2}$$

A hol $\gamma$ a nyomó anyag fajsúlyát, $y$ a magasságát, $\beta$ pedig egy az anyagtól függő állandót jelenti.

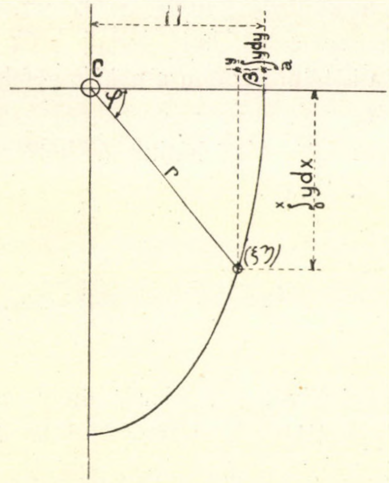
Korlátolt $y$ magasságnál, különösen laza összeállású földmunkáknál (töltés) a gyakorlat szerint ezen feltevések elfogadhatók.

Ezek előrebocsájtásával állapítsuk meg a boltozat alakját, mely a mondottak szerint meghatározott a külső erők kötélpoligonjával. Az alábbiakban ezen szempontot figyelembe véve mindig a külső erők kötélpoligonjának meghatározását tárgyaljuk.

A kötélpoligont vonatkoztassuk egy $xy$ rendszerre, hol az $x$ tengely képviseli a nyomó föld felső szintjét. Ennek következtében a nyomó magasságot $y$ ordináta képviseli. (1. ábra.)




1. ábra.




2. ábra.

Így:

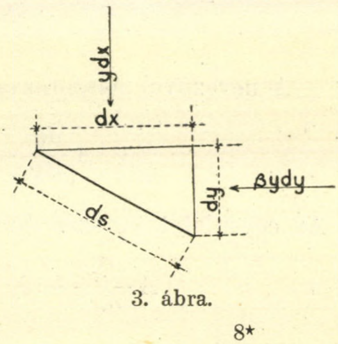
$$v = \gamma y,$$
$$h = \beta\gamma y.$$

Minthogy $\gamma$ csupán a rajz léptékét változtatja meg, a $\gamma$-t kihagyjuk és mondjuk

$$v = y, \tag{3}$$
$$h = \beta y. \tag{4}$$

Vegyük fel a priori a működő erők erőpoligonját (2. ábra). Mint tudjuk, ez általában egy folytonos görbe, melyen az ívelemek sorrendjében az ezekre ható erők egymás után vannak sorozva. Az erőpoligont vonatkoztassuk egy $\xi$, $\eta$ rendszerre.

Az ív egyes $ds$ elemeire ható elemi erők nagysága (3. ábra)




3. ábra.

$$v = yds\cos\alpha = ydx, \tag{5}$$
$$h = \beta yds\sin\alpha = \beta ydy. \tag{6}$$

Mint ismeretes az erőpoligon központi szöge ($\varphi$) (l. 2. ábra) adja a kötélpoligon megfelelő pontjához húzott érintő hajlásszögét. Vagy mondhatjuk ugyanezt olykép is: Az erőpoligonban meghúzott radiusvector, — mely egyszersmind az illető keresztmetszetre ható külső erők eredője —, irányával megadja a kötélpoligonon a neki megfelelő pont érintőjének hajlásszögét.

Ezek után felírhatjuk a kötélpoligon differentiálegyenletet (lásd 2. ábra)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\int\limits_0^x y\,dx}{H - \beta\int\limits_a^y y\,dy}, \tag{7}$$

$H$ egy felvett segéderő, mely meghatározza az erőpoligon középpontját s a melynek értéke később meghatározandó.

Elvégezve a nevezőben az integrált

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int\limits_0^x y\,dx}{H + \frac{\beta a^2}{2} - \frac{\beta y^2}{2}}.$$

Vegyük fel, hogy

$$H + \beta\frac{a^2}{2} = A; \tag{8}$$

behelyettesítve lesz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int\limits_0^x y\,dx}{A - \frac{\beta y^2}{2}}.$$

A nevezővel felszorozva lesz:

$$A\frac{dy}{dx} - \frac{\beta y}{2}\frac{dy}{dx} = \int\limits_0^x y\,dx.$$

Az egyenletet egyszer differentiálva, lesz:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} - \beta y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\beta y^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = y. \tag{9}$$

Helyettesítsük be, hogy

$$\frac{dy}{dx} = z, \tag{10}$$

minélfogva

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{zdz}{dy}.$$

Behelyettesitve a (9) egyenletbe lesz:

$$Az\frac{dz}{dy} - \beta yz^2 - \beta\frac{y^2}{2} z \frac{dz}{dy} - y = 0.$$

A kiemeléseket elvégezve:

$$z\frac{dz}{dy}\left(A - \frac{\beta y^2}{2}\right) - y(\beta z^2+1) = 0.$$

Szétválasztva a változókat lesz:

$$\frac{z}{\beta z^2+1} dz - \frac{y}{A - \frac{\beta y^2}{2}} dy = 0,$$

vegyük fel, hogy:

| | |
|---|---|
| $1+\beta z^2 = u$ (11) | $A - \frac{\beta y^2}{2} = v$ (12) |
| és akkor | és akkor |
| $2\beta zdz = du$ | $-\beta ydy = dv$ |
| és ebből | és ebből |
| $zdz = \frac{du}{2\beta}$ | $-ydy = \frac{dv}{\beta}$ |

behelyettesítve ezeket a fönti egyenletbe lesz:

$$\frac{du}{u} + 2\frac{dv}{v} = 0. \tag{13}$$

Ezen differentiálegyenlet megoldva lesz:

$$\log u + 2\log v = C',$$

vagy más alakba írva

$$uv^2 = C \qquad (14)$$

$u$ és $v$ értékeit (11) és (12) egyenletekből behelyettesítve lesz:

$$1+\beta z^2 = \frac{C}{\left(A - \frac{ay^2}{2}\right)^2}. \qquad (15)$$

Behelyettesítve (10) egyenletből $z$ értéke, lesz:

$$\beta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{C}{\left(A - \frac{\beta y^2}{2}\right)^2} - 1 \qquad (16)$$

16) alatti differentiálegyenlet, egy elliptikus integrál, melynek meghatározását, mint tudjuk véges algebrai vagy körfüggvényben nem tudjuk megadni.

Ezen integrál közelítő meghatározását az alábbi grafikus eljárással sikerült végrehajtani.

Felírhatjuk 2. ábra szerint

$$r\cos\varphi = H - \beta\int_a^y y\,dy. \qquad (17)$$

Az előzők szerint ebből felírható

$$r\cos\varphi = A - \frac{\beta y^2}{2}. \qquad (18)$$

Ezen egyenlet jobb oldalának értéke behelyettesítve (16) egyenletbe lesz:

$$1+\beta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\beta\,\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{C}{r^2\cos^2\varphi}. \qquad (19)$$

Rendezve lesz:

$$r^2 = \frac{C}{(1+\beta\,\mathrm{tg}^2\varphi)\cos^2\varphi},$$

tovább rendezve lesz:

$$r^2 = \frac{C}{\beta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = f(\varphi). \qquad (20)$$

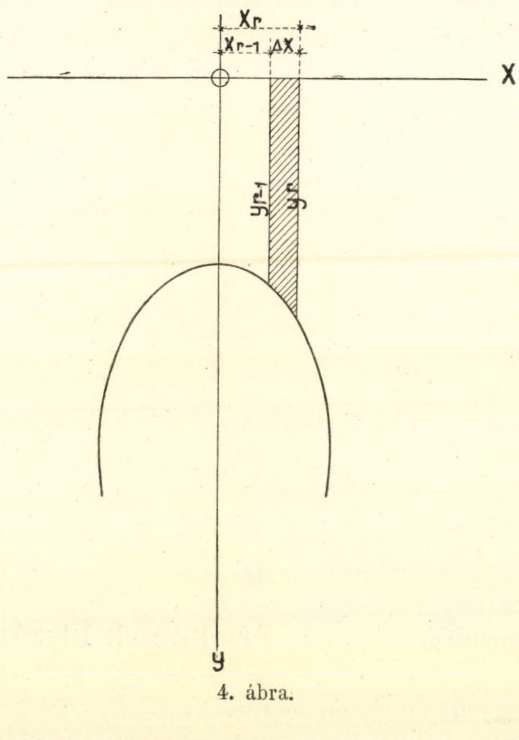
A fenti (20) egyenlet adja az erőpoligon középpontra vonatkoztatott egyenletét. Ezen egyenletről megjegyezhetjük, hogy — mint alább látni fogjuk — egy ellipsis egyenlete.

Ezek után áttérhetünk a kötélpoligon, illetőleg $y = f(x)$ egyenlet felrajzolására, azaz az $x'$ abscissák értékeinek kiszámítására.

A 2. ábra szerint felírhatjuk

$$\eta = r \sin \varphi = \int_0^x y dx, \tag{21}$$

vagyis ezen egyenlet azt mondja, hogy az erőpoligon ordinátája adja a kötélpoligon $[f(x)]$ görbe területének mérőszámát.



4. ábra.

A kötélpoligon területét 0-tól bármely $y_n$ ordinátáig kiszámíthatjuk (16), (20) és (21) egyenletek alapján (lásd 4. ábra). Ugyanis (16) egyenletbe $y_n$ értéke behelyettesítve kiszámítható $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ és ebből $\varphi$ értéke. $\varphi$ értéke tovább helyettesítve

(20) egyenletbe megadja $r$ értékét és végül (21) egyenletet megadja $\eta$ a keresett területi mérőszám értékét. Ha már most ismerjük a terület mérőszámát ($F_r$) ismerjük az $y_0$ kezdő ($x=0$) értéket, ismeretes továbbá a területnek megfelelő $y_n$ érték és ha a területet trapéznak veszszük, meghatározható $y_n$-nek megfelelő $x_r$ abscissa. Ugyanis

$$x_r = \frac{F_r}{\frac{1}{2}(y_0+y_n)}. \tag{22}$$

Minthogy csak kis részeiben tekinthető a kötélpoligon területe trapéznak, tehát ezt kis részekre bontjuk és lépésről-lépésre haladunk $x$ értékek meghatározásában. Tételezzük fel, hogy az alább leírt módszer szerint már ismeretes $y_{r-1}$ ordinátának megfelelő $F_{r-1}$ terület és $x_{r-1}$ abscissa, akkor kiszámíthatjuk egy távolabbi $y_r$ ordinátának megfelelő $F_r$ terület mérőszámát is. A 4. ábrán sraffolt területi rész nagysága, mely ha $y_{r-1}$ elég közel van $y_r$-hez, tekinthető trapéznak, lesz:

$$\Delta(r \sin\varphi) = F_r - F_{r-1}$$

és

$$\Delta x_r = \frac{F_r - F_{r-1}}{\frac{1}{2}(y_{r-1}+y_r)} \tag{23}$$

és így $y_r$-nek megfelelő abscissa

$$x_r = x_{r-1} + \Delta x_r. \tag{24}$$

II.

## Az állandók ($A$, $C$, $H$) értékeinek kiszámítása.

A (16) egyenletet újból felírjuk

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\beta}\left[\frac{C}{\left(A - \frac{\beta y^2}{2}\right)^2} - 1\right]$$

1. ábra szerint mondhatjuk:

$$\alpha)\ \text{ha}\quad y = a,\quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\beta)\ \text{ha}\quad y = b,\quad \frac{dy}{dx} = \infty,$$

Ezek alapján $A$ és $C$ ismeretlenekre a következő két egyenletet nyerjük:

$$C = \left(A - \frac{\beta a^2}{2}\right)^2, \tag{25}$$

$$A = \frac{\beta b^2}{2}. \tag{26}$$

Ezek alapján felírható

$$A = \frac{\beta b^2}{2}, \tag{27}$$

$$C = \left(\frac{\beta b^2}{2} - \frac{\beta a^2}{2}\right)^2. \tag{28}$$

A (20) egyenletből meghatározható $H$ kezdeti erő nagysága. Ugyanis tudjuk, ha $\varphi = 0$, akkor $r = H$.

Tehát $\varphi = 0$ értéknél (20) egyenlet lesz:

$$r^2 = H^2 = C, \tag{29}$$

vagyis

$$H = \sqrt{C} = \frac{\beta}{2}(b^2 - a^2). \tag{30}$$

III.

## Az erőpoligon $[f(\varphi)]$ és kötélpoligon $[f(x)]$ görbék fontosabb geometriai tulajdonságai.

### a) $f(\varphi)$ görbe vizsgálata.

Az erőpoligon egyenlete, mint tudjuk

$$r^2 = \frac{C}{\beta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi} \quad \text{(l. (20) egyenlet).}$$

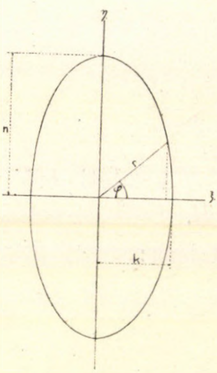
Ezen egyenletet alakítsuk át egy $\xi$, $\eta$ rendszerbe (l. 5. ábra) olykép, hogy

$$r\cos\varphi = \xi,$$
$$r\sin\varphi = \eta.$$

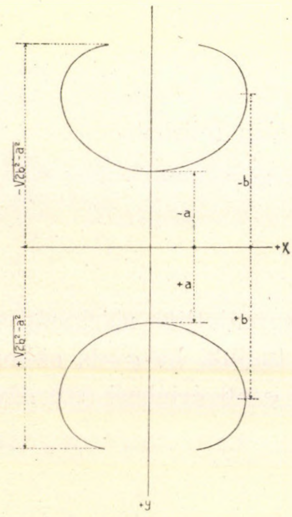
Behelyettesítve ezen értékek (20) egyenletbe és rendezve lesz:

$$\beta\eta^2 + \xi^2 = C.$$

Az ismert alakra hozva




5. ábra.




6. ábra.

$$\frac{\eta^2}{n^2} + \frac{\xi^2}{k^2} = 1, \tag{31}$$

hol (lásd 5. ábra)

$$n^2 = \frac{C}{\beta}, \tag{32}$$

$$k^2 = C, \tag{33}$$

vagy (28)-ből $C$ értéke helyettesítve lesz:

$$n = (b^2 - a^2)\frac{\sqrt{\beta}}{2}, \tag{34}$$

$$k = (b^2 - a^2)\frac{\beta}{2}. \tag{35}$$

Ezekből láthatjuk, hogy a nagy tengely és kis tengely viszonya csupán $\beta$-tól függ

$$\frac{n}{k} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{36}$$

Az ellipsis körré fajul, a víznyomás esetén, vagyis, ha

$$\beta = 1.$$

Ez esetben ugyanis

$$n = k.$$

Gyakorlati esetekben $n = \left(\frac{C}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ mindig a nagytengely, minthogy

$$\beta \leqq 1$$

és így

$$n \geqq (C)^{\frac{1}{2}} = k.$$

b) $f(x)$ **görbe vizsgálata.**

Tudjuk, hogy magának a görbének csupán a differentiálegyenletét ismerjük, melynek legegyszerűbb alakja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\left[\frac{C}{\left(A - \frac{\beta y^2}{2}\right)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Ezen egyenletből a görbe (lásd 6. ábra) következő tulajdonságait olvashatjuk le.

*a)* Minden $\pm y$-hoz a tangensnek két $\pm$ értéke tartozik. Következésképen a görbe kétágú (hyperbolaszerű).

*β)* A görbe határértékei ott vannak, a hol $\frac{dy}{dx} = 0$. Ezen feltétel pedig ki van egyenlítve (16) szerint, ha

$$\frac{C}{\left(A - \frac{\beta y^2}{2}\right)^2} = 1. \tag{37}$$

A fenti egyenlet $y$-ra nézve negyedfokú, tehát négy gyöke van, vagyis négy szélső értéke van a görbének. Természetszerűen ebből kettő esik a görbe positiv, kettő a görbe negativ ágára.

(37) egyenletet $y$ szerint megoldva és behelyettesítve $A$ és $C$ értékeit, nyerjük az $x$ tengelyre vonatkoztatott szélső értékek helyét

$$y_1 = \pm a, \tag{38}$$

$$y_2 = \pm \sqrt{2b^2 - a^2}. \tag{39}$$

Az $x$ tengelyre vonatkoztatott szélső értéke a görbének ott van, hol $\frac{dy}{dx} = \infty$. Ezen eset, mint tudjuk az állandók meghatározásából ott van, hol

$$y = \pm b.$$

*γ)* A görbe képzetessé válik, ha (lásd (16))

$$\frac{C}{\left(A - \frac{\beta y^2}{2}\right)^2} < 1. \tag{40}$$

Ezen eset bekövetkezik, ha

$$y < + a, \tag{41}$$

vagy ha

$$y > \pm \sqrt{2b^2 - a^2}. \tag{42}$$

(A számítás azonos úton végezhető, mint *β)* pont alatt.)

*δ)* $x$ értékek viselkedésére statikai megfontolás után kimondhatjuk, hogy

$$x = 0,$$

csupán ott, a hol

$$y = \pm a,$$

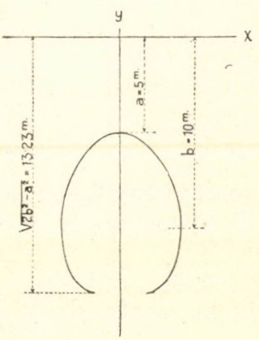
vagyis a görbe nem zárt. Erre a conclusióra jutunk a következő okoskodással:

Ha valamely kötélgörbe zárt, akkor a rája működő külső erők önmagukban egyensúlyban vannak, minden reactio hozzáadása nélkül. A mi esetünkben a görbére működő külső erők önmagukban, ha csak ez egy ponttá nem fajul, felvételünk szerint egyensúlyban nem lehetnek, tehát a görbe nem lehet zárt.

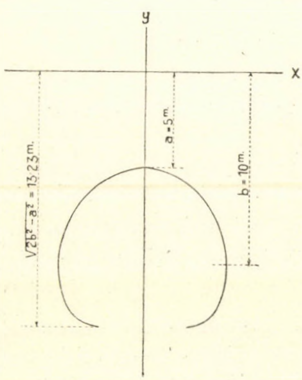
## IV.

## Gyakorlati szempontok.

A tárgyalt görbe gyakorlati fontossága abban rejlik, hogy adott terhelő anyag esetén a legczélszerűbb boltozatalak már adottnak tekinthető. Szembe állítható ezen előny az eddig szokásos eljárással, mikor is a boltozatalak kisérlet útján állapittatik meg úgy, hogy egy kisérleti boltozatalak felvételével megállapitjuk a rája működő külső erők kötélpoligonját, s az így nyert görbét veszszük a boltozat szilárdsági tengelyének.



7. ábra.

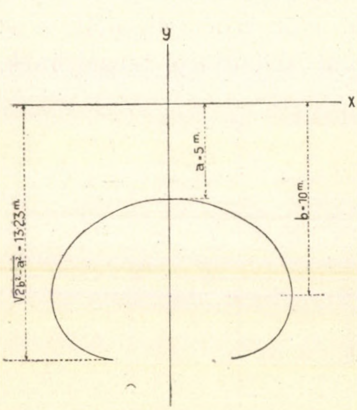


8. ábra.

Ezen eljárást folytatjuk, míg addig a határig érünk, hol a boltozatra működő külső erők kötélpoligonja tényleg egybeesik a boltozat szilárdsági tengelyével.

Gyakorlati esetekben (töltésben épitett aluljárók, átereszek) a lehozott eredmények már egyszersmind a méretezéshez szükséges adatokat is megadják. Ugyanis az erőpoligon (ellipsis) sugara adja az illető keresztmetszetre működő külső erők eredőjét. Ez az egy adat legtöbb esetben elégséges a méretezéshez. A boltozat önsúlya ugyan zavarja némikép lehozott eredményeinket; de rendszerint a töltés magassága oly nagy, hogy a boltozat fajsúlya vagy egyneműnek vehető a földével, vagy a töltés csekély magasbításával a differentia kiküszöbölhető. Ugyancsak zavarja eredményeinket az összenyomódás és a hőváltozás okozta igénybevételek. Minthogy a gyakorlatban előforduló ilynemű boltozatok ívmagassága a fesztávolságához képest jelentékeny az említett hatások okozta igénybevételek figyelmen kívül hagyhatók, minthogy számbavehető értékeket úgy sem kapunk.

Ha a feltöltés magassága nem nagy, a viszonylagos ívmagasság is kicsiny, úgy nem marad más mód hátra, mint *kezdőalaknak* meghatározzuk a most tárgyalt görbét és a rugalmas elhajlás elméletével határozzuk meg ezen alakhoz a külső erők kötélpoligonját. A szükséghez képest természetszerűen módosítjuk az eredeti alakot.




9. ábra.

Az alábbiakban három esetre megszerkesztettük a görbét. Az egyes esetek közt a különbséget $\beta$ factor nagysága képezte. Ugyanis a szerkesztést elvégeztük $\beta = 0\cdot25$ (lásd I. táblázat), $\beta=0\cdot50$ (lásd II. táblázat) és $\beta=1$ (lásd III. táblázat) esetekre. Mindegyik görbénél $\beta=5\cdot0$ m, $b=10\cdot0$ m.

A számítás menetét — úgy hiszszük — a táblázatok elég jól visszaadják.

A táblázatokra csupán azt kivánjuk még megjegyezni, hogy csak annyira pontosak, mennyire mérnöki munkáknál szükség van: t. i. számoló léczczel készültek.

Az ábrák közül a 7. ábra azon esetet tünteti fel, ha $\beta=0\cdot25$, a 8. ábra, ha $\beta=0\cdot50$, a 9. ábra, ha $\beta=1$.

Az erőpoligonokat nem rajzoltuk meg, minthogy közismert görbék, melyek minden adata rajz nélkül számítással megnyerhető.

Azon esetnek, ha $\beta=1$ egy érdekes sajátsága, hogy a boltozat bármely keresztmetszetére működő külső erők eredője ugyanaz. Ezt rögtön átlátjuk, ha meggondoljuk, hogy a hozzátartozóerőpoligon egy kör.

V.

## Laza összeállású kőzetben épült alagutak.

A nyomások oly alakulata, mikor úgy a felületegységre jutó vertikális nyomás, mint a felületegységre jutó vízszintes nyomás állandó, úgy véljük, előfordulnak a fenn írt alagutaknál. Erre való tekintettel kivánunk ezen esettel foglalkozni. Hogy ezen nyomások állandók, azért mondhatjuk, mert a nyomó magasság a műtárgy magasságához képest oly nagy, hogy a műtárgyon mérhető csekély magassági differentiák figyelembe nem jöhetnek.

Legyen a felületegységre működő vert. nyomás ... ... ... $p$,
« « « hor. « ... ... ... $h$.

Az I. alatt tárgyaltak szerint a kötélpoligon (lásd 10. ábra) differentiálegyenlete lesz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\int_0^x p dx}{H - \int_0^y h dy}. \tag{43}$$

Az integrálást elvégezve lesz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px}{H - hy}. \tag{44}$$

Szétválasztva a változókat:

$$Hdy - hydy = pxdx.$$

Az integrálás elvégezve lesz:

$$Hy - \frac{hy^2}{2} = \frac{px^2}{2} + C. \tag{45}$$

Az állandók értékeit meghatározhatjuk a következő módon:

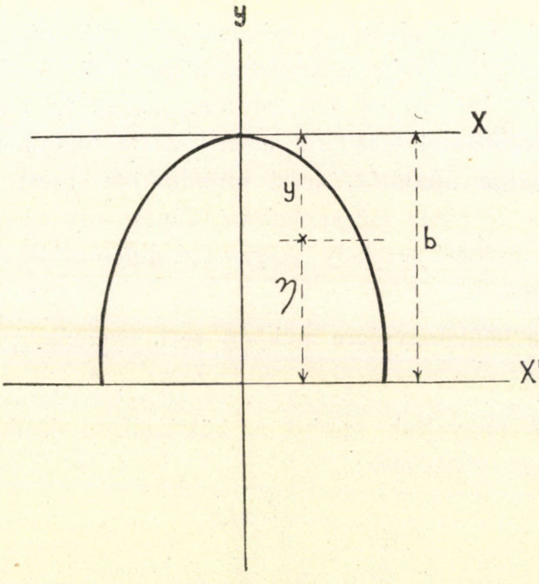
Ha $$y = b,\quad \frac{dy}{dx} = \infty,$$

tehát (44) egyenlet szerint

$$H - hb = 0,$$

vagyis

$$H = hb. \tag{46}$$




10. ábra.

Ha $x=0$, $y=0$ és így (45) szerint

$$C = 0. \tag{47}$$

(45) alatti egyenletet alakítsuk át coordinátarendszer transformatióval. Toljuk el az $x$ tengelyt $b$-vel $x'$ helyzetbe (10. ábra). Akkor

$$y = b - \eta.$$

Ez, valamint (46) és (47) egyenletek behelyettesítve (45) egyenletbe és rendezve, lesz:

$$hb^2 = h\eta^2 + px^2. \tag{48}$$

Ezen egyenlet egy ellipsis egyenlete, mely normális alakra hozva lesz:

$$\frac{\eta^2}{b^2} + \frac{x^2}{\frac{h}{p} b^2} = 1. \tag{49}$$

Az ellipsis nagy tengely $b$, kis tengelye pedig $b\sqrt{\frac{h}{p}}$, feltéve, hogy $h<p$.

A nagy és kis tengely viszonyának mérőszáma

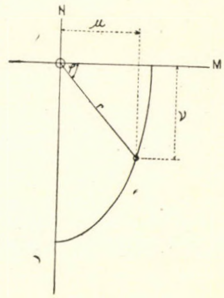
$$e = \sqrt{\frac{p}{h}}.$$

Azon esetben, ha

$$h = p$$

az ellipsis egy körré fajul.

A most tárgyalt kötélpoligonnak megfelelő erőpoligon (lásd 11. ábra) szintén egyszerűen tárgyalható az I. alatt ismertettek alapján. Ugyanis felírhatjuk:



11. ábra.

$$r \sin\varphi = px = \nu, \tag{50}$$

$$r \cos\varphi = h\eta = \mu. \tag{51}$$

Megjegyezzük, hogy $x$, $\eta$ ordináták a kötélpoligon ordinátáit jelentik.

Az (50) és (51) egyenletekből következő alakokat képezhetjük:

(50)-ből

$$\frac{\nu^2}{phb^2} = \frac{x^2}{\frac{h}{p} b^2}. \tag{52}$$

(51)-ből

$$\frac{\mu^2}{h^2b^2} = \frac{\eta^2}{b^2}. \tag{53}$$

A két egyenlet összeadva, lesz:

$$\frac{\nu^2}{phb^2} + \frac{\mu^2}{h^2b^2} = \frac{x^2}{\frac{h}{p} b^2} + \frac{\eta^2}{b^2}. \tag{54}$$

De (49) egyenletből látjuk, hogy (54) egyenlet jobb oldala egyenlő az egységgel, tehát felírhatjuk, hogy

$$\frac{\nu^2}{phb^2}+\frac{\mu^2}{h^2b^2}=1. \tag{55}$$

Ebből láthatjuk, hogy az erőpoligon a jelen esetben is ellipsis.

Az ellipsis kis tengelye, mint láttuk s (55) egyenletből is látjuk, hogy

$$hb=H.$$

A kötélpoligon bármely helyén a külső erők eredője az erőpoligon ellipsisének rádiusa, melyre áll:

$$r^2=\nu^2+\mu^2.$$

## VI.

## A közönséges lánczgörbe.

A tárgyalás körének lehetőleg teljes kimerítése kedvéért, foglalkozni kivánunk a közismert közönséges lánczgörbe esetével is. Mint tudjuk a külső erők kötélpoligonja a lánczgörbe alakját veszi fel, ha a vertikális terhelés arányos a görbe ordinátájával ($y$) és más irányú terhelés nincsen [$h=0$].

Vagyis felírhatjuk

$$v=\beta y,$$

a mely kifejezést a rajzlépték megváltoztatásával írjuk a következő alakban:

$$v=y.$$

Az erőpoligon egyenes vonal lesz (lásd 12. ábra). Az egyes erőelemek nagysága az előbb mondottak szerint

$$ydx.$$

Az I. alatt mondottak szerint és 9. ábra szemlélete után felírhatjuk a kötélpoligon differentiálegyenletét

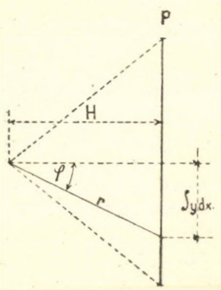
$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{H}\int_0^x ydx. \tag{56}$$

Ezen egyenlet egyszer differentiálva lesz:

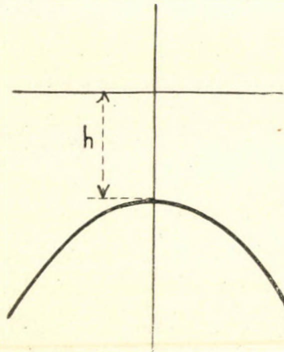
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{H} y = 0. \tag{57}$$

Ezen differentiálegyenlet megoldása

$$y = C_1 e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + C_2 e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}. \tag{58}$$




12. ábra.




13. ábra.

Minthogy a görbe symmetrikus, minden $\pm x$-nek ugyanazon $+y$ felel meg, ebből következik, hogy

$$C_1 = C_2 = C.$$

Tehát az egyenlet lesz:

$$y = C\left(e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + C^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}\right). \tag{59}$$

Az egyenletben szereplő állandókat kétféle — gyakorlatilag egyaránt jelentőséggel biró — módon óhajtjuk meghatározni.

*α)*

Vegyük fel (lásd 13. ábra), hogy

$$\sqrt{H} = h \tag{60}$$

és vegyük fel, ha

$$x = 0, \quad y = h.$$

Ha ezt behelyettesítjük (59) egyenletbe nyerjük, hogy

$$h = 2C,$$

vagyis

$$C = \frac{h}{2}\cdot \tag{61}$$

Tehát az egyenlet végleges alakba írva lesz:

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right), \tag{62}$$

vagy más jelzést használva:

$$y = h\,\mathfrak{Cof}\,\frac{x}{h}\cdot \tag{63}$$

A görbe számos érdekes tulajdonságát mellőzve, csupán a görbe bármely pontjára ható külső erők eredőjét kivánjuk meghatározni.

A 12. ábrán $r$-rel jelölt eredőjére felírhatjuk

$$r = \frac{H}{\cos\varphi} = \frac{h^2}{\cos\varphi}\cdot \tag{64}$$

A mint a lánczgörbéből ismeretes

$$\cos\varphi = \frac{h}{y}\cdot \tag{65}$$

Ezt helyettesítve (64) egyenletbe felírhatjuk, hogy a külső erők eredője

$$r = hy. \tag{66}$$

Tudjuk továbbá, hogy bármely pontra ható vertikális erők eredője

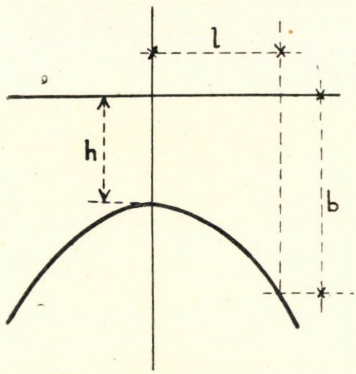
$$V = \int_0^x y\,dx = F \tag{67}$$

$F$-vel jelöljük a görbe területét. Az integrálást elvégezve kapjuk

$$F = \tfrac{1}{2}h^2\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right) = h^2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{h}\cdot \tag{68}$$

$\beta$)

Abban az esetben (lásd 14. ábra), ha adva van a záradék feletti magasság ($h$), továbbá egy ($l$) abscissának megfelelő ($b$) ordináta, az állandók meghatározása következőkép alakul.




14. ábra.

Az egyenlet általános alakja, mint tudjuk

$$y = C\left(e^{\frac{x}{\sqrt{H}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{H}}}\right) = 2C \operatorname{Cos} \frac{x}{\sqrt{H}}. \tag{69}$$

Ha

$$x = l, \quad y = b$$

és így

$$b = 2C \operatorname{Cos} \frac{l}{\sqrt{H}} \tag{70}$$

és ebből

$$C = \frac{b}{2 \operatorname{Cos} \frac{l}{\sqrt{H}}}. \tag{71}$$

Egy másik feltételünk:

ha $\quad x = 0, \quad y = h.$

Ezen értékeket (69) egyenletbe helyettesítve lesz:

$$h = 2C. \tag{72}$$

$C$ értéke (71) egyenletből helyettesitve lesz:

$$h = \frac{b}{\mathfrak{Cos}\,\frac{l}{\sqrt{H}}} \tag{73}$$

és ebből

$$H = \left(\frac{l}{\text{ar.}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{b}{h}}\right)^2 \tag{74}$$

(71) és (74) gyenletek helyettesitve (69) egyenletbe a görbe végleges egyenlete lesz:

$$y = h\,\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{\sqrt{H}}\cdot \tag{75}$$

A görbe bármely pontjára ható függőleges külső erők eredője, mint ismert, a görbe területe az illető $(x, y)$ pontig. Így felírható, hogy a terület, vagyis a külső erök eredője

$$V_x = F_x = \int_0^x y dx. \tag{76}$$

Az integrálást elvégezve és $C$ és $H$ értékeit behelyettesítve nyerjük:

$$V_x = F_x = \frac{h}{l}\,\text{ar.}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{b}{h}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{x}{\sqrt{H}}\cdot \tag{77}$$

Ezek után felírható a kötélpoligon bármely pontjára ható külső erők eredőjének egyenlete a 12. ábra szemlélete után

$$r_x^2 = V_x^2 + H^2. \tag{78}$$

*Gut Árpád.*

# I. Táblázat.

$$a = 5{\cdot}00 \text{ mtr} \quad b = 10 \text{ mtr} \quad \beta = 0{\cdot}25$$

$$C = \left(\frac{0{\cdot}25 \times 100}{2} - \frac{0{\cdot}25 \times 25}{2}\right)^2 = 88$$

$$A = 12{\cdot}5.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0{\cdot}50}\left(\frac{88}{(12{\cdot}5 - 0{\cdot}125y^2)^2} - 1\right)^{1/2}$$

| $y$ | $tg.\varphi.$ | $\varphi.$ | sin.$\varphi$. | cos.$\varphi$. | $a$ sin.$^2\varphi$. $+$cos.$^2\varphi$. | $r.$ | $r$.sin.$\varphi$. | $\triangle(r.\text{sin}.\varphi.)$ | $\triangle x.$ | $\Sigma\triangle x. = x.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5·00 | 0·00 | 0°0′ | 0·00 | 1·00 | 0·00 | 9·40 | 0·00 | 0·00 | 0·00 | 0·00 |
| 5·20 | 0·49 | 26°10′ | 0·44 | 0·898 | 0·859 | 10·15 | 4·48 | + 4·48 | 0·88 | 0·88 |
| 5·50 | 0·80 | 38°20′ | 0·62 | 0·784 | 0·711 | 11·10 | 6·88 | + 2·40 | 0·45 | 1·33 |
| 6·00 | 1·22 | 50°40′ | 0·773 | 0·634 | 0·555 | 12·60 | 9·74 | + 2·86 | 0·50 | 1·83 |
| 6·50 | 1·66 | 58°40′ | 0·854 | 0·520 | 0·451 | 13·90 | 11·90 | + 2·16 | 0·345 | 2·175 |
| 7·00 | 2·16 | 65°10′ | 0·907 | 0·420 | 0·381 | 15·20 | 13·8 | + 1·9 | 0·28 | 2·455 |
| 8·00 | 4·18 | 76°30′ | 0·972 | 0·233 | 0·290 | 17·40 | 16·90 | + 3·1 | 0·414 | 2·870 |
| 9·00 | 7·85 | 82°40′ | 0·992 | 0·128 | 0·261 | 18·30 | 18·15 | + 1·25 | 0·147 | 3·020 |
| 10·00 | ∞ | 90°0′ | 1·00 | 0·00 | 0·25 | 18 75 | 18·75 | + 0·60 | 0·065 | 3·10 |
| 11·00 | 6·93 | 82°50′ | 0·992 | 0·125 | 0·262 | 18·35 | 18·20 | — 0·55 | —0·052 | 3·05 |
| 12·00 | 2·75 | 70°0′ | 0·94 | 0·342 | 0·337 | 16·15 | 15·20 | — 3·00 | —0·26 | 2·79 |
| 13·00 | 0·87 | 41°0′ | 0·656 | 0·755 | 0·678 | 11·40 | 7·50 | — 7·70 | —0·62 | 2·17 |
| 13·23 | 0·00 | 0°0′ | 0·00 | 1·00 | 1·00 | 9·40 | 0·00 | — 7·50 | —0·57 | 1·60 |

# II. Táblázat.

$$a = 5{\cdot}0 \text{ mtr} \quad b = 10 \text{ mtr} \quad \beta = 0{\cdot}50$$

$$C = \left(\frac{0{\cdot}5 \times 100}{2} - \frac{0{\cdot}5 \times 25}{2}\right)^2 = 350$$

$$A = 24{\cdot}95$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{0{\cdot}708}\left(\frac{350}{(24{\cdot}95 - 0{\cdot}25y^2)^2} - 1\right)^{1/2}$$

| $y.$ | $tg.\varphi.$ | $\varphi.$ | $\sin.\varphi.$ | $\cos\varphi.$ | $\alpha\sin^2\varphi. + \cos^2\varphi$ | $r.$ | $r.\sin.\varphi.$ | $\triangle(r.\sin.\varphi.)$ | $\triangle x.$ | $\Sigma\triangle x. = x.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5·00 | 0·00 | 0°00′ | 0·00 | 0·00 | 0·00 | 18·70 | 0·00 | 0·00 | 0·00 | 0·00 |
| 5·20 | 0·346 | 19°10′ | 0·328 | 0·945 | 0·944 | 19·3 | 6·34 | + 6·34 | 1·24 | 1·24 |
| 5·50 | 0·575 | 29°50′ | 0·497 | 0·867 | 0·873 | 20·00 | 10·00 | + 3·66 | 0·685 | 1·925 |
| 6·00 | 0·86 | 40°40′ | 0·652 | 0·759 | 0·794 | 21·00 | 13·70 | + 3·70 | 0·645 | 2·570 |
| 6·50 | 1·18 | 49°40′ | 0·762 | 0·647 | 0·71 | 22·20 | 16·90 | + 3·20 | 0·51 | 3·080 |
| 7·00 | 1·52 | 56°40′ | 0·835 | 0·550 | 0·655 | 23·20 | 19·30 | + 2·40 | 0·355 | 3·435 |
| 8·00 | 2·58 | 68°50′ | 0·361 | 0·932 | 0·565 | 24·90 | 23·30 | + 4·00 | 0·535 | 3·970 |
| 9·00 | 6·05 | 80°20′ | 0·162 | 0·986 | 0·512 | 26·20 | 25·80 | + 2·50 | 0·294 | 4·264 |
| 10·00 | ∞ | 90°0′ | 1·00 | 0·00 | 0·50 | 26·50 | 26·50 | + 1·70 | 0·18 | 4·442 |
| 11·00 | 3·40 | 73°40′ | 0·96 | 0·28 | 0·54 | 25·50 | 24·5 | — 2·0 | –0·19 | 4·25 |
| 12·00 | 1·93 | 62°40′ | 0·89 | 0·46 | 0·61 | 24·00 | 21·4 | — 3·1 | –0·27 | 3·98 |
| 13·00 | 0·60 | 31°0′ | 0·52 | 0·86 | 0·875 | 20·00 | 10·4 | —11·0 | –0·88 | 3·10 |
| 13·23 | 0·00 | 0°0′ | 0·00 | 1·00 | 1·00 | 18·70 | 0·00 | —10·4 | –0·79 | 2·31 |

## III. Táblázat.

$$a = 5{\cdot}00 \text{ mtr} \quad b = 10{\cdot}0 \text{ mtr} \quad \beta = 1{\cdot}0$$

$$C = \left(\frac{100}{2} - \frac{25}{2}\right)^2 = 1410$$

$$A = 50$$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1410}{\left(50 - \frac{y^2}{2}\right)^2} - 1\right]^{1/2}$$

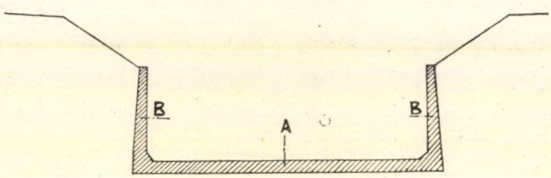
$$r = \sqrt{C} = 37{\cdot}5$$

| $y$. | $tg.\ \varphi$. | $\varphi$. | sin. $\varphi$. | $r$.sin. $\varphi$. | $\triangle(r.\text{sin}.\varphi.)$ | $\triangle\ x$. | $\Sigma\triangle\ x. =x.$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5·00 | 0·00 | 0°0′ | 0·00 | 0·00 | + 0·00 | 0·00 | 0·00 |
| 5·20 | 0·246 | 13°50′ | 0·239 | 8·95 | + 8·95 | +1·76 | 1·76 |
| 5·50 | 0·40 | 22° | 0·375 | 14·05 | + 5·10 | +0·95 | 2·71 |
| 6·00 | 0·615 | 31°40′ | 0·525 | 19·65 | + 5·60 | +0·97 | 3·68 |
| 6·50 | 0·836 | 39°50′ | 0·640 | 24·00 | + 4·35 | +0·70 | 4·38 |
| 7·00 | 1·08 | 47°10′ | 0·733 | 27·50 | + 3·50 | +0·52 | 4·90 |
| 8·00 | 1·83 | 61°20′ | 0·877 | 32·90 | + 5·40 | +0·72 | 5·62 |
| 9·00 | 3·80 | 75°20′ | 0·97 | 36·30 | + 3·40 | +0·40 | 6·02 |
| 10·00 | ∞ | 90° | 1·00 | 37·50 | + 1·20 | +0·13 | 6·15 |
| 11·00 | 3·44 | 73°50′ | 0·960 | 35·90 | — 1·60 | —0·152 | 5·998 |
| 12·00 | 1·38 | 54°10′ | 0·811 | 30·40 | — 5·50 | —0·478 | 5·520 |
| 13·00 | 0·424 | 22° | 0·375 | 14·00 | —16·40 | —1·31 | 4·21 |
| 13·23 | 0·00 | 0°0′ | 0·00 | 0·00 | —14·00 | —1·075 | 3·135 |

# A FÖLDBE MÉLYÍTETT NYILT CSATORNASZELVÉNY MÉRETEZÉSE.

## I.

A szerkezet, melynek méretezését tárgyalni kivánjuk (lásd 1. ábra) a földbe mélyitett U alakú tartó. A tartó hosszirányban rendeltetésének megfelelően kiterjedt. A gyakorlatban rendszerint hajózó csatornák fontosabb pontjain talál alkalmazást mint vízelzáró kapuk szilárd kerete, ú. n. kamarazsilip.




1. ábra.

Tárgyalni azonban azon részeket kivánjuk csupán, a melyekre kapuknak vagy más szerkezeteknek hatásuk nincsen.

Tartószerkezetünk ezek szerint a talajon végig fektetett gerenda ($A$) és a gerenda két végén egy-egy támfal ($B$).

A támfal méretezése ismert elvek szerint történik. A rája működő külső erők az önsúlytól eltekintve a földnyomás, vagy a csatornában levő víznyomás vagy e két erőnek kombinácziója. Ezen erők hely, irány és nagyság tekintetében a gyakorlat számára eléggé ismerteknek mondhatók.

Azon esetben, ha az oldalfalak a fenékkel mereven össze vannak építve, ezek mint egyik végökön befogott tartók működnek. A külső erők ismertek, méretezésük semmi nehézségbe sem ütközik.

A fenékgerendára működő külső erők: a támfalak súlya, a támfalak közvetítésével átháritott hajlítónyomaték, mely a föld- vagy víznyomásból ered, a gerenda önsúlya, a kamarában levő víz vertikális nyomása és végül a talajreactio.

Az összes külső erők ismertek csupán a talajreactiók eloszlásának törvénye ismeretlen.

Vizsgálatunk feladata nem lehet tehát más, minthogy megkeressük a talajreactiók eloszlásának törvényét.

Feltételezhető, hogy a talaj mint rugalmas alátámasztás működik, vagyis összenyomódásával arányos ellentállást fejt ki.

Ha tehát a tartó egy helyen $y$ mértékkel nyomódik a talajba az ezáltal kifejtett reactió — lineáris összefüggést feltételezve — lesz:

$$q = ay. \tag{1}$$

Ezen egyenlet azt jelenti, hogy a talajreactiók eloszlásának ábrája hasonló a gerenda elhajlási vonalához.

Ezek után felírható a tartó elhajlási vonalának differentiálegyenlete.

Mint ismeretes, a nyomatéki ábra differentiálegyenlete

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q = ay. \tag{2}$$

Ismeretes továbbá, hogy az elhajlós vonal differentiálegyenlete

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{\varepsilon I}. \tag{3}$$

Ezen egyenletek szerint [(2), (3)] felirható, hogy

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{a}{\varepsilon I}y.^1 \tag{4}$$

Jelöltessék

$$\frac{a}{\varepsilon I} = k. \tag{5}$$

---

[1] $\varepsilon$ a tartó rugalmassági modulusa, $I$ az inertia nyomatéka.

Akkor a differentiálegyenlet alakja lesz:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -ky. \tag{6}$$

Jelöljük továbbá

$$\frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\frac{a}{4\varepsilon I}} = p, \tag{7}$$

akkor a differentiálegyenlet megoldott alakja lesz:

$$y = Ae^{px}\cos px + Be^{px}\sin px + Ce^{-px}\cos px + De^{-px}\sin px. \tag{8}$$

A nyert egyenlet helyességét igazoljuk, ha a negyedik differentiálhányadost képezve a (6) egyenletre jutunk.

$$\frac{dy}{dx} = p\,(Ae^{px}\cos px - Ae^{px}\sin px + Be^{px}\sin px + Be^{px}\cos px -$$
$$- Ce^{-px}\cos px - Ce^{-px}\sin px - De^{-px}\sin px + De^{-px}\cos px), \tag{9}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2p^2[-Ae^{px}\sin px + Be^{px}\cos px + Ce^{-px}\sin px - De^{-px}\cos px], \tag{9a}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2p^3[-Ae^{px}\sin px - Ae^{px}\cos px + Be^{px}\cos px - Be^{px}\sin px -$$
$$- Ce^{-px}\sin px + Ce^{-px}\cos px + De^{-px}\cos px + De^{-px}\sin px], \tag{10}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -4p^4[Ae^{px}\cos px + Be^{px}\sin px + Ce^{-px}\cos px + De^{-px}\sin px] =$$
$$= -ky. \tag{11}$$

Vagyis újból a (6) egyenletet nyertük, tehát a differentiálegyenlet megoldása helyes.

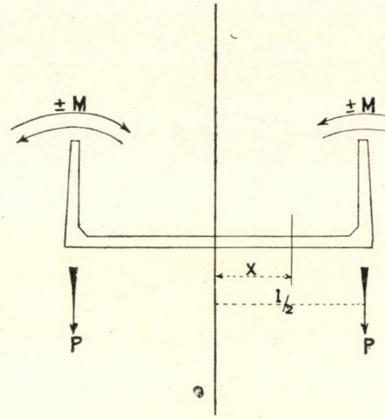
## II.

## Az integrálállandók meghatározása.

Az I. alatt lehozott egyenlet általános, a mennyiben csak az volt a feltétel, hogy a gerenda, melynek elhajlási vonalát kerestük, végig rugalmasan legyen alátámasztva.

A problémát tovább vizsgálva a következő megszorításokat kivánjuk tenni:

A kamarazsilip (lásd 2. ábra) az $y$ tengelyre symmetrikus legyen.




2. ábra.

A tartórendszerre $x = \pm \frac{l}{2}$ helyen $P$ külső erők és $\pm m$ nyomatékok működjenek.

Ezek alapján (8) egyenlet állandói meghatározhatók.

*a)*

Minthogy symmetrikus terheléseket veszünk fel, szükségképen kell, hogy a tartó elhajlási vonala $y$ tengelyre szintén symmetrikus legyen. Ezt olykép fejezhetjük ki, hogy $y$ értéke ugyanaz lesz, ha $+x$-t és $-x$-t helyettesítünk (8) egyenletbe. Vagyis

$$f(+x) = f(-x).$$

Ha (8) egyenlettel a mondottakat kifejezzük, lesz:

$$Ae^{px} \cos px + Be^{px} \sin px + Ce^{-px} \cos px + De^{-px} \sin px =$$
$$= Ae^{-px} \cos px - Be^{-px} \sin px + Ce^{px} \cos px - De^{px} \sin px. \quad (12)$$

Ebből:

$$(A-C) \cos px (e^{px} - e^{-px}) + (B+D) \sin px (e^{px} + e^{-px}) = 0. \quad (13)$$

(13) egyenlet csak oly módon állhat fenn $x$ minden értékeire, ha

$$A-C=0 \tag{14}$$

és

$$B+D=0, \tag{15}$$

vagyis

$$A=C \tag{16}$$

és

$$B=-D. \tag{17}$$

Ezt figyelembe véve (8) egyenlet alakja lesz:

$$y=A\cos px\,(e^{px}+e^{-px})+B\sin px\,(e^{px}-e^{-px}), \tag{18}$$

vagy kényelmesebb alakba írva:

$$y=2A\cos px\,\mathfrak{Cof}\,px+2B\sin px\,\mathfrak{Sin}\,px. \tag{19}$$

Tudjuk, hogy a hajlított tartókra működő nyomaték és az elhajlási vonal közt fennálló viszony:

$$\varepsilon I\,\frac{d^2y}{dx^2}=M. \tag{20}$$

Felvételünk szerint, ha $x=\pm\frac{l}{2}$,

$$M=m.$$

Felírhatjuk tehát (lásd (9$a$)):

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\pm\frac{l}{2}}=4p^2\left[-A\sin\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{pl}{2}+\right.$$
$$\left.+B\cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{pl}{2}\right]=\frac{m}{\varepsilon I}. \tag{21}$$

Ezen egyenletből

$$B=A\operatorname{tg}\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{pl}{2}+\frac{\frac{m}{4\varepsilon Ip^2}}{\cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{pl}{2}}. \tag{22}$$

Ismeretes, hogy:

$$dM=Q\,dx, \tag{23}$$

hol $Q$ jelenti a vertikális nyiró erőt.

(23)-ból felírható

$$\frac{dM}{dx} = Q. \tag{24}$$

A (21) alatt már láttuk, hogy

$$M = 4\varepsilon I[-A \sin px \,\mathfrak{Sin}\, px + B \cos px \,\mathfrak{Cos}\, px]. \tag{25}$$

Ezen egyenlet $x$ szerint differentiálva adja a vertikális nyiró erőt s ez lesz:

$$\begin{aligned} Q = -\frac{a}{p}\,[A\,(\sin px \,\mathfrak{Cos}\, px + \cos px \,\mathfrak{Sin}\, px) + \\ + B\,(\sin px \,\mathfrak{Cos}\, px - \cos px \,\mathfrak{Sin}\, px)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Tudjuk, ha

$$x = \frac{l}{2}, \quad \text{akkor} \quad Q = P.$$

Így felírható, hogy

$$\begin{aligned} -P = \frac{a}{p}\Big[A\Big(\sin\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{pl}{2} + \cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{pl}{2}\Big) + \\ + B\Big(\sin\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{pl}{2} - \cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{pl}{2}\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{27}$$

Ezen egyenletbe (22) egyenlet szerint $B$ értéke helyettesítve lesz:

$$\begin{aligned} -P = \frac{a}{p}\Bigg[\Bigg(A \operatorname{tg}\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{pl}{2} + \frac{m}{4\varepsilon I p^2}\,\frac{1}{\cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{pl}{2}}\Bigg) \\ \Big(\sin\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{pl}{2} - \cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{pl}{2}\Big) + \\ + A\Big(\sin\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{pl}{2} + \cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{pl}{2}\Big)\Bigg]. \end{aligned} \tag{28}$$

Összevonva lesz:

$$\begin{aligned} -P = \frac{a}{p}\Bigg[A\Bigg(\frac{\sin^2\frac{pl}{2}}{\cos\frac{pl}{2}}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{pl}{2} - \sin\frac{pl}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}^2\frac{pl}{2}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{pl}{2}} + \\ + \sin\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cos}\,\frac{pl}{2} + \cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{pl}{2}\Bigg) + \\ + \frac{m}{4\varepsilon y p^2}\Big(\operatorname{tg}\frac{pl}{2} - \mathfrak{Tg}\,\frac{pl}{2}\Big)\Bigg]. \end{aligned} \tag{29}$$

Tovább rendezve lesz:

$$-P=\frac{a}{p}\left[A\frac{\sin\frac{pl}{2}+\mathfrak{Sin}\frac{pl}{2}}{2\cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{pl}{2}}+\frac{m}{4\varepsilon Ip^2}\left(\operatorname{tg}\frac{pl}{2}-\mathfrak{Tg}\frac{pl}{2}\right)\right]$$

és ebből

$$A=\left[\frac{m}{4\varepsilon Ip^2}\left(\mathfrak{Tg}\frac{pl}{2}-\operatorname{tg}\frac{pl}{2}\right)-\frac{pP}{a}\right]\frac{2\cos\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Cof}\frac{pl}{2}}{\sin pl+\mathfrak{Sin}\,pl}. \qquad (31)$$

Ugyanily módon lehozva

$$B=\left[\frac{m}{4\varepsilon Ip^2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{pl}{2}}+\frac{1}{\mathfrak{Tg}\frac{pl}{2}}\right)-\frac{Pp}{a}\right]\frac{2\sin\frac{pl}{2}\,\mathfrak{Sin}\frac{pl}{2}}{\sin pl+\mathfrak{Sin}\,pl}. \qquad (32)$$

Az állandók meghatározása után csupán arra óhajtunk utalni, hogy a (25) egyenlet alapján számítható bármely keresztmetszetre működő külső erők nyomatéka és (26) alapján bármely keresztmetszetre ható nyiró erő nagysága.

*Gut Árpád.*

# BOLYAI JÁNOS IFJUSÁGA.[1]

(1802—1822.)

Eddig ismert forrásaink ugyan számos adatot tartalmaznak BOLYAI JÁNOS ifjúkoráról,[2] de tanulmányairól csak töredékes képet adnak, a katonai mérnök-akadémián töltött évekről pedig alig szólanak. Nehány újabban napvilágra került kézirat szerencsésen egészíti ki eddigi adataink hézagait. Ezeknek nagy részét, mint már másutt említettem,[3] néhai SZABÓ SÁMUEL hagyatékában találtam. Innen valók: BOLYAI FARKAS két feljegyzése fiáról (1812. és 1817-ből), JÁNOS rigorosumi latin dolgozata, édes anyjának két levele, s nehány, apjától való levél (1818—1823 között), terjedelmes levelezésüknek csekély maradványa. A Magyar Tud. Akadémia bocsátotta rendelkezésemre BOLYAI GÁSPÁR FARKAS hoz intézett levelét, a melyet JÁNOS születésének hírére írt. A mödlingi cs. és kir. katonai műszaki Akadémia pedig JÁNOS utolsó bizonyítványáról küldött másolatot. Ezenkívül még ez utóbbi intézetnek nem rég kiadott történetét[4] is felhasználhattam. Végül, legutóbb a cs. és kir. közös Hadügyministerium levéltárából is került elő pár ide tartozó okirat.

Az eddig megjelent életrajzokat — talán említeni is felesleges — szintén értékesítettem; az anyag feldolgozásának módjára nézve SCHLESINGER LAJOS emlékbeszéde[5] szolgált útmutatással.

[1] Bemutatták a Magyar Tud. Akadémia III. osztályának 1909. decz. 13-án.

[2] Ilyenek: SZILY K.: Adatok Bolyai F. életrajzához. Budapest, 1884. A végén Bolyai J. életrajza B. Gergely jegyzeteiből (32—34. l.). (Értekezések a math. tud. köréből X. köt. IX. sz.) SCHMIDT F.—STÄCKEL P. Gauss F. K. és Bolyai F. levelezése. Budapest, 1899. SCHLESINGER L. Bolyai-Bodor levelek. Math. és Phys. Lapok. 1902. XI. köt. 197—230.

[3] *Adalékok Gauss és Bolyai levelezéséhez.* Math. és Term. tud. Értesítő 1907. XXV. köt. 328. l.

[4] GATTI (FR.): Geschichte der k. u. k. Technischen Militär-Akademie. Wien, 1901—1905. I., II. Bd. Az ide tartozó adatok legnagyobb része az I. kötetben van.

[5] SCHLESINGER L.: Bolyai János. Math. és Phys. Lapok. 1903. XII. köt. 57—88. l.

Dolgozatom a gyermekkorról aránylag kevés újat mond, mert erről új adat is kevés volt, de ezt már az összefüggés kedvéért sem hagyhattam el. A kézirati anyagnak egy részét mellékletül közlöm. Megjegyzem még, hogy BOLYAI JÁNOS mathematikai tanulmányairól részletesebben külön közleményben lesz szó.

Mindazoknak, a kik adataim gyűjtésében és kiegészítésében támogattak, különösen dr. FERENCZI ZOLTÁN úrnak, a budapesti egyetemi könyvtár igazgatójának és a mödlingi cs. és kir. katonai műszaki Akadémia igazgatóságának, e helyen is köszönetet mondok.

## 1.

BOLYAI JÁNOS Kolozsvárt, anyja szülőinek házában, 1802 deczember 15-én, este 9 órakor született.[1] Mint atyja, kevéssel utóbb, írja:[2] «egészséges szép gyermek, finom vonásokkal, fekete hajjal és szemöldökkel s tüzes sötétkék szemekkel, a melyek néha úgy ragyognak, mint két drágakő».

A nagyapa, a kinek sok gondja között utolsó örömei közé tartozott unokájának születése, öröme mellett családi büszkeséggel így ír:[3] «a JÁNOS nevet annyival is inkább approbálom, hogy a familiánkban sok János volt».

Gyermekkorának első éveit a család Domáldon töltötte, a hol az atya, BOLYAI FARKAS kedvvel gazdálkodott s művészi hajlamait követve rendezgette kertjét. 1804-ben, az év elején B. Farkast a marosvásárhelyi ref. collegium tanári székébe ülteti a főconsistorium. Ennek az állásnak elfoglalásával Maros-Vásárhelyre beköltöztek ugyan, de ezután is sokszor időztek a' gyarapodó és szépüli domáldi birtokon, kivált nyáron és szüretkor.

Nagy gonddal ügyel az apa JÁNOS testi nevelésére. Nemcsak elég jelentékeny orvosi ismeretei vezették ebben, de valószínűleg irányította a ROUSSEAU ÉMILE-je is,[4] a mit olvasott és jól ismert. Nem is volt beteges JÁNOS gyermekkorában, sőt testét állandóan gyakorolja, ügyesíti. Öt éves korában a kertben már «jól megtudja a földet munkálni kis kapájával». Még később, 10—12 éves korában is, szereti a kerti munkát; s

---

[1] L. alább a BOLYAI FARKAS 1812-ből származó feljegyzését. *(II. Melléklet.)*

[2] *Gauss és Bolyai levelezése.* 49. l.

[3] BOLYAI GÁSPÁR levele B. Farkashoz. (Bolya, 1803 jan. 9-ről.) A M. T. Akadémia kézirattárában. *(I. Melléklet.)*

[4] Orvosi tudása ismeretes, (v. ö. pl. BEDŐHÁZI: A két Bolyai. M.-Vásárhely 1897. 318. l.); a fiához intézett (1818—23 közötti) levelekből is látható. Az 1820 okt. 17-iki levelében idézi több helyen ROUSSEAU-t.

korát túlhaladó komoly tanulmányokkal töltött órák után igaz gyermek módjára mászkál a fákon és gyönyörködik [1] a madártojásokban.

Azonban már az első gyermekjátékoknál rendkívüli mathematikai tehetségnek csírái mutatkoznak. Mint négy éves gyermek, ismeri a geometriai alakokat. a kört, ellipszist, még a *sinus*-ról is van tudomása. Papirból ollóval geometriai alakokat szeret kivágni. Játszva megtanulja már öt éves korára a csillagképeket is, melyeknek alakját utánrajzolni próbálgatja.[2]

Bizonyos, hogy a fiú tehetségén kívül, az apa mathematikus hajlandósága is irányította ezt a fejlődést, a ki gyönyörűséggel elégítette ki a korán fejlődő gyermek tudásvágyát. Másrészt azonban, mint gondos nevelő, a rendszeres tanulmányok megkezdésében nagy tapintattal és óvatossággal járt el.

Az olvasást, 6 éves kora táján, kevés mutogatásra szinte észrevétlenül sajátította el JÁNOS, egy évvel később már németül kezdett tanulni.[3]

Midőn elérte a 9-ik esztendejét, a gimnáziumi tanulmányokat kezdette meg otthon. Atyja nem akarta a gyakran váltakozó *classis praeceptorok* [4] kezére bízni a nagy jövőt igérő növendéket. Maga választá ki, legjelesebb tanítványai közül JÁNOS-nak házi tanítóit. Ezek közül első volt VAJDA DÁNIEL, azután következett CSAPÓI SZILÁGYI JÓZSEF.[5] A mathematikai tanulmányok vezetését B. FARKAS magának tartotta fenn.

Ebben az időben JÁNOS, a magyar és német írás és olvasáson kívül, alig tudott valamit rendszeresen; számtanból és geometriából csak annyit, a mennyire maga reá jött.

Most egyszerre kezd a latin nyelvhez és a mathematikához. Mind a kettőben, de kivált a mathematikában, rövid időre bámulatos haladást tett. Mindjárt EUKLIDES Elemeivel, EULER algebrájával és VEGA kézikönyvével [6] kezdette az apa a rendkívüli tehetséghez illő módon.[7] A fiú, a lángész felvillanásával, sokszor egyszerre átpillantotta a tételek bizonyítá-

---

1 L. a *II. Melléklet*-et.

2 *Gauss és Bolyai levelezése*, 86. l., (1807. XII. 18-ról) és a *II. Melléklet*.

3 L. *II. Melléklet*.

4 Az I—VI. osztályokban csak ideiglenes osztálytanítók oktattak. A professorok a philosophusoknak, jogászoknak (vagy theologusoknak) tanítottak.

5 VAJDA DÁNIEL, a családnak később bizalmas jó barátja, nem sokkal azután br. KEMÉNY SIMON-nál nevelő; CSAPÓI SZILÁGYI JÓZSEF, fia az 1867 körül Kis-Küküllő megye alispánja volt. (SZILY K.: Adatok Bolyai Farkas életrajzához. 1884. 33. l.)

6 VEGA (GEORG F.): Vorlesungen über die Mathematik. Wien. 4. köt. Az I. kötet a számvetést (Rechenkunst) és algebrát tartalmazza.

7 Az adatokra nézve: GAUSS-BOLYAI levelezés 99. l. (1816 IV. 10-ről).

sát, vagy a problema megoldását, s előre elmondva azt, «mint az ördög» — beszélé az apa — «előmbe ugrott és sürgette, hogy menjek tovább.[1] Tizenharmadfél éves korára már a geometriában átment a planimetrián és stereometrián, a trigonometriát is beleértve és az analitikus geometriából már a kúpszeleteket elvégezte.[2]

Kétségtelen, hogy a parallelák elméletében levő hiányról az első felvilágosítást ekkor kapta. Nemcsak JÁNOS későbbi feljegyzéseiből[3] tudjuk ezt, hanem látjuk abból az alakból is, melyben atyja a párhuzamosak tanát ekkor neki tanította.[4]

Hogy mikor került a kollegiumba, mint rendes tanuló, nem állapítható meg teljes bizonyossággal. A Bolyai Gergely feljegyzései szerint[5] 12 éves korában, a mostani IV-ik osztálynak megfelelő poetika classisba adta volna be az apja. De ha el is fogadjuk ezt az állítást, úgy látszik, hogy némely tárgyat külön, a diákokkal (VII., VIII. osztály) együtt hallgatott, mert csak így egyeztethető össze B. Farkasnak a következő tudósításával[6] 1816 febr. 23-ról:

«Tegnap János a Fő-Curatorok engedelméből a' deákokkal a' Physicából eminenter censurázott, azon kivül, hogy az Auctorból ad aperturam másoktól kérdeztetett, felelt a' Sublimior Physicából mindenütt nagy készséggel, tisztasággal és *modestiával* — felelt pedig deákul.»

Ekkor már — atyja szerint — nemcsak a differencziál és integrál számításban szerzett nagy készséget és könnyűséget, hanem ezeknek mechanikai alkalmazásaival is sikerrel foglalkozott. Jól tudta a VEGA kézikönyvének első két kötetét de járatos volt a 3. és 4-ikben is. Szerette az astronomiát és a tiszta, mély elméleteket.

Az 1815/6 iskolai esztendő második felében atyjának physikai és chemiai előadásait hallgatta, a midőn még csak a rhetorika classist (V. osztály) végezte.[7]

Az 1817. évben, a logika (VI.) classist is elvégezvén, leteszi június

---

1 Bolyai Gergely után SZILY K.: Adatok stb. 33. l.

2 A VEGA előbb említett könyvének II. kötetéből. L. *II. Melléklet.*

3 STÄCKEL P.: A nem euklidikus geometria története. Math. és Termt. Értesítő. 1900. XVIII. köt. 242. l.

4 L. B. FARKAS levelét, fiához 1820 ápr. 4-ről. Ezt a nevezetes levelet eddig csak B. János hiányos német fordításából ismerjük. (Közölte STÄCKEL P. i. h. 243—245. l.) Hiteles és teljes szövegét más alkalommal fogom közölni.

5 SZILY K.: Adatok stb. 33. l.

6 BOLYAI-BODOR levelek. Math. és Phys. Lapok. 1902. XI. köt. 202. l.

7 GAUSS-BOLYAI levelezése. 99—100. l.

utolsó napján, az akkori szokás szerint a deáki rigorosumot; — természetesen, mint első.[1]

A mathematikai és physikai tanulmányokban, a mint az előbb említettük, már a diákokon is túljárt. Az iskolának akkor legfontosabb tanulmányában, a latin nyelvben is messze előrehaladt. Rigorosumi írásbeli dolgozatát a tanárai nagy dicséretekben részesítették.[2] Szerencsés véletlen folytán napvilágot láthat most[3] ez a bizonyítéka az ő latin nyelvbeli készségének. A dolgozat Corn. Nepos-nak mutatja erős hatását, de úgy látszik Suetonius-t is forgatta (a *scopus* szó vall erre). A stilizálásban már az elegans Cicero befolyását ismerhetjük fel, főleg a szórend sajátosságát tekintve.[4] Hogy nem feledte el később se a latin nyelvet, arról az örök becsű emléket állított az Appendix tiszta, tömör stilusában.

Az apa gondossága azonban a tanulmányokon és a test nevelésén kívül a művészetekre is kiterjedt.

Hegedűlni János 7 éves korában kezdett; kilencz éves korában a hangjegyeket elég jól olvassa; tíz éves korában már klasszikus vonós négyesekben első hegedűt játszik. Ugyanekkor zeneszerzéssel is megpróbálkozott, s a mint atyja írja, darabjaiban «mind volt valami, nem tsak gondolat, méllyetske érzés is».[5] Diák korában művészi ügyességgel kezeli a vonót, a legnehezebb versenyműveket is eljátsza.[6]

Tizedfél éves korában rajzolni is kezdett, de félbenhagyta nem sok idő mulva.[7] A poézishez nem volt hajlandósága[8] s úgy látszik, a költők olvasásában sem talált nagy gyönyörűséget.

A «nem mindennapi» gyermeknek jellemét nehéz lett volna akkor is harmonikusan fejleszteni, ha az apa és az anya egységesen jártak volna el vele szemben. De nem így történt. Egy kis leány testvére még

---

[1] A m.-vásárhelyi collegium levéltárában levő *Subscriptionale Protocollum* (II. sz.) 33. lapján ez a bejegyzés található: «*Anno 1817 die 30-a Junii subscripsere legibus . . . sequentes:* [elsőnek]. *Johannes Bolyai m. p. Status: Politicae. Rflor 6.* (Dr. Dékáni Kálmán m.-vásárhelyi tanár szíves közlése.)

[2] Szily K.: Adatok. 33. l.

[3] L. alább a *IV. Melléklet.* Úgy látszik, hogy ez adott magyar szöveg fordítása latinra. (Szily K.: Adalékok. 33. l.)

[4] Ezeket a megjegyzéseket dr. Geréb József, gyakorló főgymn. tanár szívességéből közölhetem.

[5] L. alább a *II. Mellékleten.*

[6] Gauss-Bolyai levelezése 99. lap.

[7] L. *II. Melléklet.*

[8] L. *III. Melléklet.* (Bolyai Farkas feljegyzése 1817-ből.)

1807 előtt meghalván, egyetlen gyermekül maradt szülői mellett. Anyja, mint egyetlen gyermekkel sokszor teszik, túlságosan kényeztette őt[1] s a fiú szeszélyes kedvével az apa sem bírt mindig.

Tíz éves korában — írja B. FARKAS — mindenféle gyakorlati életbeli dologra ügyetlen; szeret egyedül, elmélyedve bolyongani. Sokszor dolgozik a kertben a tanulásra kiszabott idő alatt, máskor reggeltől-napestig könyveibe merül, egészsége veszedelmére is.[2]

Lobbanékony természete is korán mutatkozik,[3] szinte félelmes módon. Tizenöt éves korában csendes természetű gyermek, de e mellett szívesen és tűzzel játszik társaival.[4] Nem sokkal fegyelmezettebb, mint volt, sokszor elmarad a tanításról, máskor túlságosan tanul. Szeret másokat ingerelni, a miért sok emberrel könnyen összeütközésbe kerül. Néha engedetlen szülőinek, de kivált az anyjának. Jellemének azonban nemes, szép vonásai is fejlődnek: őszinte, az igazsághoz szilárdan ragaszkodik. Jó lelkű, szánakozó, háládatos. Másokról nem mond rosszat, haragot csak addig tart, a míg a megbántást elfeledi.[5]

Bizonyos, hogy János nevelésében is voltak hibák, de lehetetlen fel nem ismerni lelki tulajdonságainak képén, az anyai szerencsétlen örökség vonásait.

## 2.

Alig haladta meg JÁNOS ötödik életévét, már foglalkozik atyja avval a gondolattal, hogy annak idején GAUSS-hoz küldi ki[6] tanulmányai betetőzésére. A fiú mathematikai hajlamai és rohamos előmenetele tanulmányaiban ezt a gondolatot kedvencz tervvé érlelték. Maga is kívánkozik GAUSS-hoz,[7] bár az ő mathematikai nagyságát nem annyira dolgozataiból,[8] mint édes atyjának elbeszéléseiből ismerhette. Valószinű, hogy már ekkor olvasta GAUSS-nak B. FARKAS-hoz intézett leveleit is. Mély hatással volt lelkére ezenfelül édes atyjának az a nagy tisztelete, a melylyel ifjúkori barátjáról nyilatkozott.

---

[1] GAUSS-BOLYAI levelezés, 97. lap: «nur ist meine Xantippe schlechte Mutter». (1807-ből).

[2] L. *II. Melléklet.*

[3] L. a 11 éves korából elbeszélt esetet az édes anyjával *(II. Melléklet.)*

[4] GAUSS-BOLYAI levelezés 99. l.

[5] L. *III. Melléklet.*

[6] GAUSS-BOLYAI levelezés 87. l.

[7] U. ott. 96. l.

[8] V. ö. SCHLESINGER L.: Bolyai János: *Math. és Phys. Lapok.* XII. köt. 60. l. Megjegyezzük, hogy B. FARKAS-nak ekkor Gauss művei közül csupán a *Theoria motus* volt meg.

A terv megvalósítása elé azonban anyagi bajok gördítettek akadályt. Ezeknek leküzdésére segítségül jött gr. KENDEFFI ÁDÁM [1] avval a nagylelkű ajánlattal, hogy JÁNOS-t Göttingába menetelekor támogatni fogja.[2] Azonkívül, hogy az egyházi főconsistorium támogatását megnyerhesse, elhatározta B. FARKAS, hogy fiával a deáki rigorosum után egy évvel három (a kolozsvári, nagyenyedi és marosvásárhelyi) református collegiumban nyilvános vizsgát tétet [3] s ezután (1818 őszén) fogja külföldre küldeni.

Három évi tanulás a dicsősége tetőpontján álló GAUSS-nál bizonyára a legmegfelelőbb továbbképzés lett volna János tehetségének. Atyja is szerette volna elkísérni, még egyszer látni régi barátját.[4] Azonban nem szabad elfelednünk, hogy az egyetemi előadások ekkor még keveset nyújtottak a tudomány magasabb részeiből. GAUSS maga sem volt kivétel ez alól. Igazi haszna tehát csak úgy lett volna János göttingai tanulásának, ha a zárkózott GAUSS őt is bizalmába fogadja úgy, mint az édes apját.

BOLYAI FARKAS 1816 áprilisában megírta kedvencz tervét GAUSS-nak, bár ez nyolcz évvel azelőtt írt utolsó levelére sem válaszolt. Az óhajtva várt válasz erre is elmaradt. Azon okok, a melyeket BEDŐHÁZI [5] és SCHLESINGER [6] urak felhoznak, teljesen érthetővé teszik GAUSS eljárását. A fő ok mindenesetre magának a levélnek hangja volt és az a mód, a melylyel GAUSS családi viszonyait tárgyalja.[7] Bár BOLYAI FARKAS nagyrabecsült barátját sérteni távolról sem akarta, lelkének túlságos naivságában túl ment a baráti bizalmasság megengedte határokon.

A szépen kigondolt és gonddal ápolt terv meghiusulása más csapásra terelte JÁNOS életpályáját. Atyja arra gondolt előbb, hogy a pesti vagy a bécsi egyetemre küldi.[8] Azonban különösebb vonzóerővel egyik sem bírt, olyan mathematikus professor, a ki B. JÁNOSRA irányító hatás-

---

[1] Gr. KENDEFFI ÁDÁM († 1834.), a család grófi ágának utolsó férfitagja. Sokat működött Erdély gazdasági és sportügyeinek előbbrevitelén.

[2] BOLYAI-BODOR levelek. *Math. és Phys. Lapok.* XI. köt. 204. l.

[3] GAUSS-BOLYAI levelezés 100. l. Hogy ezt a szándékát B. Farkasnak így kell magyarázni, arra utal az erdélyi ref. főconsistorium rendelete (1776—70. lt. sz.). E szerint a külföldi akadémiákra készülő ifjaknak a nevezett három collegiumban vizsgát kellett tenni. Idézi : TÖRÖK J. A kolozsvári ref. collegium története. III. köt. 297. l.

[4] BOLYAI-BODOR levelek. Math. és Phys. Lapok, XI. köt. 198. l.

[5] BEDŐHÁZI J.: A két Bolyai. Maros-Vásárhely. 1897. 192., 193. l.

[6] SCHLESINGER L.: Bolyai János. Math. és Phys. Lapok. XII. köt. 61. l.

[7] GAUSS-BOLYAI levelezés 99. és 100. l.

[8] U. ott.

sal lehetett volna egyik helyen sem volt. A szabad egyetemi élettől [1] is féltette fiát B. Farkas. Ilyen körülmények között inkább a katonai mérnöki pálya felé fordult, a melyhez ifjú korában maga is érzett hajlandóságot. Ez ellen szólhattak: a terhes költségek, a fiú nehezen fékezhető természete, mellette: a szép előhaladás reményén kívül a bécsi cs. kir. mérnök akadémiának jó híre,[2] mely ismeretes volt külföldön is abban az időben. Végül mégis a katonai pálya mellett döntött, főleg azért, mert ott jó alkalom van, a mathematikából «megnyerni azt, a' mit sehol a' Monarchiába, úgy mint ott nem lehet»[3] Ennek az akadémiának szervezetéről, tanulmányi rendjéről alább bővebben szólunk. Itt csak anynyit említünk, hogy 7 osztálya volt, azonban akadémiai (szakiskolai) jellegű csak a harmadiktól kezdődőleg. Ebbe bejuthattak 11—12 éves növendékek.[4] Ezt tudva, Bolyai Farkas, hogy minél kevesebb időt veszítsen, már a deáki rigorosum után (1817 őszén) szerette volna Jánost ide beadni.[5]

A mint tehát elhalványult a reménység arra, hogy János Göttingába mehessen, tanulni kezdett a mérnök-akadémiában teendő felvételi vizsgálatra. El is készült még az iskolai esztendő alatt, még pedig németül «mint a víz».[6] Nem szerezhetett ez neki különösebb fáradságot, mert a Hauser mathematikai kézikönyve,[7] a melyből vizsgáznia kellett, majdnem ugyanazt tartalmazza, mint a Vega-énak első két kötete, a melyet János jól ismert. Csak a gyakorlati földméréstant tárgyalja bővebben az a könyv, mint emez.

Azonban egyelőre ez a terv sem valósulhatott meg, az anyagi eszközök híjján. Egy bécsi ismerősétől megtudja Farkas, hogy fiát az akadémiába a negyedik osztályon felül nem fogják felvenni, négy évi tanít-

---

1 U. ott.

2 L. Bedőházi: A két Bolyai. 401—411. l. V. ö. még Gatti Fr.: Geschichte der k. u. k. Technischen Militär-Akademie. Wien, 1901—1905. I. köt. 446—447. l. János főherczeg jelentését.

3 B. Farkas levele 1818 szept. 10-ről.

4 Gatti Fr.: Geschichte der k. u. k. Technischen Militär Akademie. I. köt. 474—475. l.

5 Bolyai-Bodor levelek. Math. és Phys. Lapok XI. köt. 211. l.

6 Bolyai-Bodor levelek az idézett helyen. (1817 jul. 3-ról.)

7 Hauser (Mathias): Analytische Abhandlung der Anfangsgründe der Mathematik. Wien. I—III. köt. I. kiadás 1778—1786. II. kiadás 1816—1823. (Az utóbbi megvan a M. Tud. Akadémia könyvtárában.) Nagyon hosszú ideig volt kézikönyv a cs. kir. mérnök-akadémiában.

tatására pedig nincsen módja.[1] Ez az esztendő (1817) gazdaságilag a legszerencsétlenebbek közé tartozott az egész XIX. században. Rendkívüli rossz termés után még súlyos pénzügyi válság sújtja az országot. A kollegium is csak rendetlenül tudta fizetni tanárait.

A kétszeres csalódás után bizonyára elkedvetlenedve folytatta tovább 1817/8-ban tanulmányait János, mint philosophus diák, Marosvásárhelyen. Nem csodálkozhatunk, hogy nem teljesíti iskolai kötelességeit és ANTAL JÁNOS,[2] a történelem professora arról panaszol, hogy óráit nem látogatja.[3] Atyjának előadásain nem volt már tanulni valója s a mint ennek feljegyzéséből gyaníthatjuk, mathematikai tanulmányait el is hanyagolta ebben az esztendőben.[4] Annak azonban van nyoma, hogy KÖTELES SÁMUEL-nek,[5] filozófiai előadásait kedvvel hallgatta, mert később Bécsbe is elküldeti az utána készült jegyzeteket.[6] Joggal hihetjük, hogy ennek, a maga idejében méltán becsült filozófusnak hatása volt JÁNOS-ra, a ki a «mély elméletekhez» már korán vonzódott. Azonban BOLYAI FARKAS nem tett le korábbi tervéről, hogy Jánost a katonai mérnökakadémiára küldje, ámbár, ha az élet valóságos viszonyait inkább fontolóra veszi, láthatta volna, hogy fiának fényes tehetsége és nemes jellemvonásai a katonai pályán ugyan előre vihetnék, de hevessége, lobbanékony természete és összeférhetetlen volta miatt nem alkalmas arra.

JÁNOS jövőjét az döntötte el, hogy gr. KEMÉNY MIKLÓS,[7] apjának ba-

---

[1] Számítása szerint erre 8000 rhénes forint kellett volna. Lásd: BOLYAI-BODOR levelek. Math. és Phys. Lapok. XI. köt. 211. l.

[2] ANTAL JÁNOS [1767—1854.], marosvásárhelyi lelkész és a collegium tanára, később erdélyi ref. püspök.

[3] Bolyai Gergely közlése. SZILY: Adatok stb. 33. lap.

[4] B. FARKAS levélfogalmazványa 1818 szeptemberből: «A' mi a' Mathesist illeti, *most hiszem, hogy kijöttél belőlle*» u. annak levele 1818 szept. 14-ről: «A Mathesisre nézve .... az idén hátra mentél.»

[5] KÖTELES SÁMUEL [1770—1831.] előbb marosvásárhelyi, később nagyenyedi tanár. Munkáit már magyarul írta, a melyeket nagyra becsültek. (KONCZ J.: A marosvásárhelyi ref. kollegium ismertetése. 255—266. l.)

[6] BOLYAI FARKAS levele Jánoshoz 1818 okt. 17-ről; «Közelebbről Petrasko úrtól írj .... szép, hogy a' kotákat 's Köteles cursussait ingyen felvitte.»

[7] Gróf KEMÉNY MIKLÓS (1791—1829.) Aranyosszék és Marosszék főkirálybirája. Felesége gr. Teleki Póli. Testvére az irodalom és művészetpártoló gr. K. Sámuelnek. (NAGY IVÁN: Magyarország családai. VI. köt. 175., 180. l.) Bolyai Farkas, az ő kora halálakor így emlékezik meg róla: «ollyan Atya ragadtatott-el, a' ki rendkívül való tálentomai mellet, a' legszebbet nyerte-meg, a' szeretetet — azzal az egyetlen moddal, hogy szeretett.» l.: «*Szive kiömlése* a' Maros Vásárhelyi ref. kollégyombeli ifjúság-

rátja, a kollegiumnak «az emberiségért égő szívű» főgondnoka, bőkezű segítséget adott az akadémiára felmenetel költségeihez.[1] Valószínű, mert hiszen B. FARKAS 10—20 frtot is nehezen tudott később a fiának küldeni, hogy gr. KEMÉNY M. az egész rendes évi díjat magára vállalta, még pedig négy-öt esztendő[2] tartamára. Ez nem volt csekélység, mert az 1818. iskolai esztendő kezdetétől (októbertől) kitett 1000 frtot, a melyből 100 frtot ezüstben, a többit papirban kellett két részletben, félévenként előre[3] fizetni. Ehhez járult még az új növendék első felszerelésére 225 frt papirban. Már egy év mulva leszállott ez a díj 880 frtra, (ebből 130 frt ezüstben), s a míg János ott tanult, többet nem változott.[4] Azonban ez a B. FARKAS fizetéséhez képest, anyagi bajait nem is számítva, túlságos nagy teher lett volna.

János az 1818. év augusztusában ment föl Bécsbe, nem lehetetlen, hogy épen nemeslelkű pártfogója vitte magával. Elképzelhetjük, hogy a szeretett fiút, a ki a család sokféle gondja és baja között világító napsugár volt,[5] nem könnyű szívvel bocsátották el maguktól szülői, de kivált anyja. Az édes anya, a kin ekkor már súlyos idegbaj fenyegető jelei mutatkoznak, hősies elszántsággal így nyilatkozik fiáról: «itthon ne maradjon, de ha elmegy, meg fogok örülni».[6] Milyen nehezen tűrte fiának távollétét, látjuk fenmaradt leveléből, melyben így ír: «Oh Édes Fijam! nem mindenkor van az embernek kedve sok dologhoz, de hozzá kell szoknunk jo idején azt tennünk a' mihez telyeségel nints kedvünk . . . tavasz süt ha rollad jót hallok; örökös tél borul előmbe az ellenkező esetbe».[7] Nemsokára örökös tél borul egész életére.

---

nak. Egy kedves Atya Halálán». 1829. 3. lapon. Különben az elől álló meleg hangú nekrolog (4—16. l.) a BOLYAI FARKAS kétségtelen műve. Ehhez a kis munkához dr. ERDÉLYI PÁLnak, az erdélyi múzeumi könyvtár igazgatójának szivessége juttatott.

1 BOLYAI F. levele JÁNOS-hoz 1818 szept. 14.: «Gr. Kemény Miklós uréknak *(a kik éppen jóltevőid)* járj kedvekbe.» u. ott így emliti gr. K. M.-t: «*az* engem *irántad viseltetett atyai buzgóságával* örökre el-kötelezett érdemes Barátom».

2 BOLYAI F. levele JÁNOShoz 1818 szept. 10.: «Nem valószinű, hogy a segedelem 5 esztendő előtt megszakadjon, de az emberek halandók.»

3 GATTI (FR.): Geschichte etc. I. köt. 469. l.

4 GATTI (FR.): Geschichte der k. u. k. Technischen Militär-Akademie. I. köt. 481., 482. lap.

5 GAUSS-BOLYAI levelezés. 57. l. «ein weckender Strahl in die Nacht unserer Seele».

6 BEDŐHÁZI az i. h. 77. l.

7 BOLYAI-né levele JÁNOS-hoz 1818 deczember közepéről l. a *Mellékletek* közt VI. sz.

Az az intézet, mely 1818 augusztus végétől kezdve egy időre Jánost befogadja, a *cs. kir. mérnök-akadémia*, első sorban azt a czélt szolgálta, hogy a műszaki csapatokhoz használható tiszteket neveljen. Azonban ezekhez a végzett növendékeknek csupán a javát nevezték ki, a többi a sorhadnál kap alkalmazást. Az intézetben végzett növendékekből kerül ki a vezérkar nagyobb része is.[1]

A mint előbb már említettük az akadémiában hét éves volt a tanítás teljes folyama, de az első két osztály csak «*normális*» iskola, az ú. n. akadémiai tanfolyam a III—VII. osztályokat foglalja magában. Volt azonfelül még egy osztály, de csak olyan végzett növendékek számára, a kik mérnökkari tisztjelöltek (Ingenieur-Corps-Cadetten) lettek. A III., IV. és V. osztályok főtárgya a tiszta mathematika, a VI-é az alkalmazott mathematika, az utolsó VII-é a szorosan vett katonai tudományok: erődítéstan, taktika és a polgári építéstan.[2]

Az anyag felosztása körülbelül így történt:

A mathematikából a III. osztályban: arithmetika és algebra, a IV.-ben az egyszerű geometria, stereometria, nivellázás és síkbeli trigonometria, felvétel mérő asztallal, gömbi trigonometria, az V ben a kúpszeletek, sorok, felsőbb fokú egyenletek megoldása, a differencziál és integrál számítás elemei és mathematikai földrajz kerülnek sorra. A VI. osztályban következik: a szilárd és cseppfolyós testek mechanikája, rövid kísérleti fizikai tanfolyammal kiegészítve, a differencziál és integrál számítás folytatása.

Az utolsó (VII.) osztályban tanulják a következő szaktárgyakat: a taktika általános alapelvei, erődítéstan, megerősített helyek támadása és védelme, földalatti erődítés és földalatti harcz, polgári építéstan, víz-, út- és erődépítéstan.

---

[1] V. ö. GATTI i. mű I. köt. 442., 455. l. BOURGEOIS tábornok, akadémiai igazgató jelentése 1809-ből. — A mérnök-akadémiát *(Ingenieurs-Akademie)*, SAVOYAI JENŐ herczeg javaslatára III. KÁROLY állította fel 1717 végén. Az intézet székhelye, többnyíre *Bécsben* volt, 1798—1851-ig épen abban az épületben, a melyben most a *hadi-levéltár (k. u. k. Kriegs-Archiv)* van. *(VII. Stiftgasse.)* Úgy a mérnök-akadémia, mint a tüzérségi-akadémia 1869-ben megszűnt, s helyükbe lépett a *katonai műszaki-akadémia (k. u. k. technische Militär-Akademie)*, jelenleg *Mödling*-ben, Bécs mellett (l. GATTI i. művében). A bécsújhelyi *katonai akadémia* ezektől egészen különálló intézet, a mely a sorhad számára nevel tiszteket.

[2] GATTI i. mű I. köt. 420. l. A tiszta mathematikára 1809 óta van három osztály, u. ott 449., 458. l. és HAUSER: Analyt. Abhandlung etc. III. k. 1816. p. III. (Előszó.)

A mérnökkari tisztjelöltek még egy (VIII.) évet töltenek ott, ezalatt az erődítéstanban és a katonai építéstanban nyernek behatóbb oktatást.[1]

A mérési gyakorlatokra a IV—VII. osztályokban, valamint a VI. osztály fizikai gyakorlataira 14—14 napi idő volt kiszabva.[2]

Ezenkívül tárgyai voltak a tanításnak, mint segéd és előkészítő tanulmányok: német, latin, franczia és cseh(!) nyelv, szép és helyesírás, levelezés és ügyiratok, világtörténet és földrajz több esztendőre felosztva. Szabadkézi rajz, mint előtanulmány, helyszínrajz, geometriai, távlati rajz, erődítés- és építés-rajz.[3]

Testgyakorlatok: vívás, táncz, lovaglás. Azonkívül az összes osztályok a legfelsőbb osztálybeliek vezénylése alatt katonai sorgyakorlatokat végeznek a nyári hónapokban. A két utolsó osztály a fegyverfogásokat gyakorolja be.[4]

A mint látható, csak a VII. osztály ad szorosan véve katonai szaknevelést, a többiben a mathematikai tárgyak foglalják el az első helyet.

A tanítás czélja nem az, hogy a növendékekből kész tudósok váljanak, hanem abban áll, hogy képesítse őket további tanulásra, a maguk erején.[5]

Az intézet — mint a katonai intézetek ma is — bennlakással volt egybekötve. A növendékek idejét a sokféle tárgy nagyon lefoglalja, de «hogy a szellemi erőt ne nagyon fárasszák», gondoskodnak arról, hogy az elvont tárgyak délelőttre jussanak s könnyebbekkel váltakozzanak. A délutánt rajz és a délelőtt tanultak ismétlése foglalja le. Nagy kert is van, a hol a növendékek szabad óráikat játékkal tölthetik.[6]

A katonai szaktárgyak és a mathematika, valamint a helyszinrajz tanárai mérnökkari kiváló tisztek, a taktikát a sorhadból odarendelt tiszt, a többi tárgyakat polgári tanárok tanítják. A tanítás módszeréről a korhoz és a katonai intézetekben megszokott eljáráshoz képest, meglepő felvilágosodott utasításokat találunk:

---

1 I. mű I. köt. 417., 420., 475., 524. l. Miután az i. helyeken az 1803., 1814., ill. 1835. évekből közölt tanítástervek közül, csak az utolsó tartalmazza a tárgyak osztályonként való felosztását, a fenti terv részletei csupán valószínűek.

2 I. mű I. köt. 476. l.

3 U. ott 475. l.

4 U. ott 476. l. Ez a tudósítás ugyan 1814-ből való, de a tanulmányi rend állandó voltát tekintve, egészen bizonyos, hogy 1818—1823 között is így volt.

5 U. ott 475. l.

6 U. ott 420. l.

«A tudományos oktatásban az analitikus tanításmódot fogadtuk el, mint olyant, a mely leginkább megnyitja az értelmet és megtanítja a fogalmak egybefűzését. Törekedünk a tanulónak az előadott tárgyról világos fogalmat nyújtani, határozott magyarázatokkal és arra tanítjuk őt, hogy előrebocsátott tételekből és igazságokból helyes következtetéseket vonjon le... Keveset vagy semmit sem tanultatunk könyv nélkül, hanem arra szorítjuk a tanulót, hogy saját előadásában, a mennyire csak lehetséges, más kifejezéseket vagy ábrákat használjon, mint a kézikönyv. Ennélfogva jobban fel lehet ismerni, vajjon a tárgyat a maga igaz értelmében és terjedelmében felfogta-e? Ezt a tanításmódot nemcsak a mathematikai tudományoknál, hanem az egész többi oktatásban is követjük, vagy megközelítjük, a mennyire a tárgyak engedik.»[1]

Hogy ez a szép utasítás a gyakorlatban teljesen megvalósult-e, bajos volna eldönteni, de mindenesetre jellemző az intézetre. Mivel pedig Bourgeois tábornok,[2] a kitől ezek az utasítások erednek, 1811-ig igazgató marad és a tanári kar nagyrésze 1818-ban olyanokból áll, a kik még Bourgeois alatt is szolgáltak, s különösen ha tekintetbe vesszük a tanítóintézetek hagyományaiban rejlő nagy erőt, joggal tehetjük föl, hogy abban az időben mikor Bolyai János ott tartózkodott, még ilyen szellem uralkodott az akadémia oktatásában.

A növendékekkel való bánásmódra pedig az az irányadó; «hogy nem szabad az ifjak között semmi más különbséget tenni, mint olyant, a mely alapját a jobb tanulmánybeli előhaladásban és a jobb magaviseletben találja».

Tiszti kinevezésre csak azokat ajánlja az akadémia az udvari főhaditanácsnak, a kik tanulásukkal és magaviseletükkel erre érdemesnek mutatták magukat. Nem is igen fordult elő, hogy az ilyenek, erre az ajánlásra később méltatlannak bizonyultak volna.[3]

Az intézet felsőbb vezetése és irányítása János kir. herczeg[4] kezében volt, a ki ezt a felügyeletet nemcsak névleg, hanem műveltségénél és tehetségénél fogva valósággal is, nagyon hosszú ideig gyakorolta.

---

[1] U. ott 419., 474. l. Ez utóbbi két idézet Bourgeois tábornok, akadémiai igazgató 1803-beli «Administrations-Bericht»-jéből.

[2] Bourgeois (Joseph Toussaint) [1745—1821.]. A mérnökkar legkiválóbb tisztjei közé tartozott. (Gatti i. mű. I. köt. 187. l.)

[3] I. mű. I. köt. 442 l. Az 1792—1807-ig összesen csak 80 növendék hagyta el tiszti rangra ajánlva az intézetet. Az összes növendékek száma ekkor évenként 200 körül volt.

[4] János kir. herczeg [1782—1859.]. II. Lipótnak nemeslelkű és tehetséges fia; a ki a természettudományokat kedvvel művelte. A műszaki csapatok felügyelője 1801—1849-ig. (Gatti i. mű. I. köt. 407. l.)

Ilyen volt az az intézet, a melybe Bolyai János, magasabb kiképzésre ment föl. Az intézet nyújtotta oktatás műszaki és katonai szempontból kiváló volt, bár mai fogalmainkhoz képest magasabb színvonalra nem emelkedett, pl. már a differencziál-egyenletekről nem tanítottak. Azonban az itteninél többet, jobbat csak a francziák elsőrangú intézetei, mint az «*École Polytechnique*», nyújtottak. Talán ott lett volna János még jobb helyen — ha ez egyáltalán szóba kerülhetett volna.[1]

Bolyai János a mérnök-akadémiába 1818 augusztus 24-én lép be.[2] Evvel életének új és a további pályájára döntő fontosságú korszaka kezdődik.

3.

Bolyai Farkas nagy megnyugvással értesült fiának a mérnök-akadémiába való felvételéről. «Örömmel értettem — írja hozzá — hogy már bé vagy az új kertbe ültetve; adja Isten, hogy foganj meg, az ültetéssel nemesedj, mint a' plánták szoktak, nőjj magassan fel erről az alattvalo földről az égre, 's térj vissza valaha onnan szelid árnyékkal 's jó gyümölcsökkel arra a' földre a' honnan felnőttél.»[3]

János a IV. osztályba, az akadémiai osztályok másodikába lépett be; a felvételi vizsgán hatodik lett.[4] Ez a körülmény arra utal, hogy a gr. Kemény Miklós segítsége nem sokkal a felutazás előtt jöhetett, úgy hogy Jánosnak nem volt már ideje kipótolni az utolsó évben a mathematikában esett hátramenetelét. Bár kétségtelen, hogy az új környezet és az a vágy, hogy magát ebben kitüntesse, új igyekezetre sarkallták János-t, de az első (1818/9) év nem folyt le nehézségek nélkül.

A német nyelvet János ekkor már jól bírta, úgy hogy az idegen nyelven való tanulás csak kevés, átmeneti nehézséggel járhatott. Tudott valamit a francziából is, hiszen ezt az akadémia III. osztályában kezdették társai tanulni. Atyja buzdítja, hogy szabad idejében angolul tanuljon; a latint és hegedülést, és a rajzolást ne hanyagolja el.[5] Úgy látszik, erre az utolsóra szükség is volt. A rajzolást az akadémián, mint fontos segéd-

---

[1] Ehhez közelálló nézeteket fejteget Bedőházi: A két Bolyai 410. l.

[2] Gatti i. mű. I. köt. 725. l. Az Akadémia okmányaiból ezeket közli: Bolyai de Bolya Johann. Geboren am 21 [!] Dec. 1802. zu Maros-Vásárhely [!]. Vater ist Professor der Mathematik und Physik zu Maros-Vásárhely. Eingetheilt am 24. Aug. [1818.]. Kostgeher pr. 1200 fl. Am 9. Sept. 1822. Cadet im Ingenieur-Corps.

[3] B. F. levele 1818 szept. 14-ről.

[4] U. ott: «öt jobb van mint te».

[5] U. a. helyen.

eszközét a mérnöknek, szigorúan követelték ; JÁNOS pedig ebben, a mint tudjuk, gyakorlatlan volt.[1] De szép haladást tett már az első év alatt.[2] Több nehézségbe kerülhetett, mert önmegtagadással és lemondással járt, a katonai fegyelemnek és az alárendeltségnek megszokása. Ismerte jól fia természetét B. FARKAS, midőn nyomatékkal inti : «Tsak a' másokhoz való szelidséget, meg-betsüllést, felsőbbekhez való engedelmességet és azt a Modestiát ajánlom, mely a' tudosnak ollyan ékessége mint az ifjunak a' szeméremetesség. Az indulatokon tanulj uralkodni, hogy az okosság világa mint a nap süssön a' fellegeket tornyozo szélvészek felett.»[3] Mindenesetre segítségére volt ebben JÁNOS-nak az internatus felügyelő tisztjeinek egyike, HALÁSZ GEDEON utászszázados,[4] a kinek figyelmébe őt pártfogója,, ennek barátja[5] ajánlotta, valószínű, hogy a kezdet nehézségein az ő jóindulatú tanácsai is könnyítettek.

Az első esztendőben nem jutott még JÁNOS az osztálya legelejére,[6] s azt is valószínűnek tartjuk, hogy JÁNOS királyi herczegnek különös figyelmét csak a következő évben vonta magára.

Az akadémia csendes munkáját az 1819/20 esztendő folyamán kellemetlen események zavarták meg.

Már az 1819. karácsonya óta az V. osztály, a melybe JÁNOS járt és a VI., elkeseredetten gyűlölték egymást, de a legfelső osztály tagjainak közbenjárására kibékülnek. Komolyabb következésekkel járt a következő eset, a milyenre alig mutat példát az akadémia története. A IV. osztályosok, a legidősebb társaik csábítására, egy felügyelő altisztet meg-

---

[1] BOLYAI FARKAS-né, BENKŐ ZSUZSÁNNA levele 1818 deczemberből *(V. Melléklet)* «tsak a jelen valo kötelességedet teljesitsd ; ezt a rajzolásra s minden egyebekre nézve értem».

[2] BOLYAI-BODOR levelek. Math. és Phys. Lapok. XI. köt. 215. l. «reménységem felett jók» [a rajzolatok], 1819 szept. 3-ról.

[3] B. F. levele 1818 okt. 17-ről.

[4] HALÁSZ GEDEON [1786—?]. Szül. Alsó-Dabason (Pest m.). Az Akadémiát, mint Beleznay-alapítványi növendék végezte 1805—1809. (GATTI (FR.) : Geschichte etc. I. köt. 669. l.). E szerint a kiválóbb tisztek közé tartozhatott. Még 1820-ban is az akadémia mellett van (i. h. 487. l.).

[5] BOLYAI F. levele 1818 szept. 10. : «Irok gr. KEMÉNY MIKLOS-nak, és, a' kinek mélto jo barátja, HALÁSZ GEDEON urnak». Emliti az ugyanazon év szept. 14. és okt. 17-iki leveleiben is.

[6] Ezt lehet következtetni BOLYAI F. 1819 szeptemberben irott soraiból : «Az ötödik Classisban remellem megnyered jobban is a Professoroknak, Lenkernek 's a Feldmaréchalnak kedvit.» Az itt említett LENKER (őrnagy) az igazgató mellé rendelt fegyelmi és gazdasági felügyelő, a Feldmaréchal : az igazgató, gr. NOBILI.

támadtak és bántalmaztak. Ezt a fegyelemsértést az igazgató, gr. NOBILI [1] altábornagy, olyan szerencsétlen módon intézte el, hogy a felsőbb osztályos növendékeket megsértette és azok felháborodásukban valóságos strike-ot rendeztek. Tömegesen elhagyták az intézetet, kiszabadítván egy házi fogságban levő társukat is.

Ilyen lázadás, előkelő katonai intézetnél kétszeresen súlyos beszámítás alá esett és kínos megbotránkozást keltett egész Bécs városában. JÁNOS kir. herczeg, értesülvén a történtekről, nagy körültekintéssel és energiával maga vette kezébe az ügy kibonyolítását. Tapintatos fellépésével és személyiségének erejével a növendékeket visszatérésre bírta, s izgatottságukat lecsillapította. Azonban a büntetések sem maradtak el, ebben szigorú volt, de csak kevés növendék részesült nagyobb büntetésben.[2] Nemcsak ez a jel mutatta, hogy az akadémián a fegyelem lazulni kezd. A növendékek kiszökdösnek, a közelben házmestereknél s más lakóknál polgári ruhát öltenek és mindenféle dorbézolásra alkalmat találnak. Azt is külön kell elrendelni, hogy a katonatanárok mindig egyenruhában tartsanak előadást.[3]

Annál feltünőbb volt az akadémián uralkodó rendnek megbomlása, mert az a megelőző igazgató, BOURGEOIS tábornok alatt, még a napoleoni hadjáratok zavarai közepette is, kifogástalan maradt.[4]

Ilyen körülmények között nem sokáig váratott magára a leggyökeresebb intézkedés: az akadémia szerencsétlenkezű igazgatójának fölmentése állásától.[5]

Már ezt megelőzőleg szigorúbb lett az akadémiai növendékeire való felügyelet. Legjellemzőbb, hogy a felügyelő tisztek számát háromról tizenkettőre szaporítja az udvari főhaditanács.[6] Erre valóban szükség is volt 250 bennlakó növendék mellett.

Az új igazgató, br. HERZOGENBERG tábornok,[7] erős kézzel visszaállítja a rendet. A növendékek kimenetelét és a künnétkezés szabadságát meg-

---

[1] Gr. NOBILI (Joh. Benedict). [1758—1823.]. Az akadémiának igazgatója 1811—1820. (GATTI i. mű I. köt. 305—306. l.)

[2] L. GATTI i. mű. I. köt. 482—484. l. Az eset 1820 január 20., 21-én történt s úgy emlegették, mint «januári lázadás»-t.

[3] U. ott. 487. l.

[4] GATTI i. mű, főleg 187. l.

[5] U. ott 488. l.

[6] GATTI u. ott 485. l.

[7] Br. HERZOGENBERG (August), valódi nevén PICOT DE BECCADUC, a franczia hadseregből lépett át. (GATTI u. ott 488. l.)

szorítja, s még a szeptemberi nagy szünidőre sem engedi többé haza a növendékeket.[1]

Nem tudjuk mennyi ideig maradt érvényes ez a túlságosan szigorú rendelkezés. De JÁNOS-nak úgy is mindegy volt, már csak a nagy távolság miatt sem igen mehetett volna haza a szünidők alatt. Hiszen csak az oda- és visszautazással 20—22 nap telt volna el és csupán az utazás költsége 100 frtra ment volna.

A mint az akadémia történetében közölt adatokból kivehető, az előbb elbeszélt zavarokban magyar fiúk is voltak a vezetők között. De nem valószínű, hogy JÁNOS közöttük lett volna. Komoly, tudományos kérdések foglalkoztatják. Az idősebb és komolyabb SZÁSZ KÁROLY-lyal való szoros ismeretsége erre az időre esik. Együtt elmélkednek a parallelák tanáról s vele együtt teszi meg B. JÁNOS az első, még tétovázó lépéseket az ő «ujj más világának» megteremtésére.[2] Anyjának állapota is roszszabbra fordult már 1819 közepe óta,[3] a mi okvetetlenül mély hatással volt lelkére. De a legnyomósabb ok, mely a mellett szól, hogy a januári lázadásban nem volt részes az, hogy B. FARKAS 1820 ápr. 4-ről kelt s előbb említett levelében egyenesen arra szólítja fel, hogy JÁNOS kir. herczegnél közbenjárója legyen egy erdőfelügyelői állás elnyerésében. Így csak abban az esetben írhatott, ha tudta, hogy fia a kir. herczegnél jó nevet szerzett. Ezt pedig, mint a januári lázadásnak részese, elveszítette vagy meg sem szerezhette volna.

Úgy hiszszük tehát, hogy ebben, az 1819/20. iskolai esztendőben történt, hogy B. JÁNOS a királyi herczeget fényes tehetségével bámulatba ejtette. Annyira megtetszett a királyi herczegnek a lángeszű növendék, hogy nála megfordult erdélyi urak előtt is megdicsérte. Később is megtartotta jóindulatában.[4] Mindenesetre ez esztendő folyamán osztálya legelejére küzdötte fel magát, másodiknak.[5]

---

[1] U. ott 490. l.

[2] L. erről bővebben STÄCKEL P.: A nem-euklidikus geometria története stb. Math. és Természettud. Értesítő. 1900. XVIII. köt. 246—247. l. Megjegyezzük e helyen, hogy SZÁSZ KÁROLY [1798—1853], a ki juris professornak ment Enyedre, politikai okokból a jog tanításától eltiltva, 1839-től kezdve mathematikát és fizikát adott elő.

[3] BOLYAI-BODOR levelek. Math. és Phys. Lapok XI. köt. 214. l. 1819. jun. 14-ről.

[4] SZILY: Adatok stb. 33—34. l.

[5] L. br. HERZOGENBERG felterjesztését 1822. szeptember 6-ról. *(A közös hadügyminiszterium levéltárában.)*

A következő két év, 1820/1. és 1821/2, az akadémia történetében a csendes és sikeres munka korszaka volt.[1]

Ezalatt fejlik tovább JÁNOS-ban a nem-euklidikus geometriának gondolata, de SZÁSZ KÁROLY 1820 közepén eltávozván,[2] már magára maradva fűzi tovább elmélkedéseit. Tanulmányaiban, valamint a rajzolásban is szép előhaladást tett ezen idő alatt.

Természetes dolog, hogy az ő tehetségét úgy tanárai, mint az igazgató-tábornok mind nagyobb mértékben méltányolják és őt is megkülönböztetik a többi növendék felett.[3]

Szabad idejében — a mely ugyancsak szűken volt kimérve — művészeti készségét is fejleszti. Egyik társa alkalmat ad, hogy a kamarazenében gyakorolja és tökéletesítse magát. Társai körül ebben is kiválik: csak egy van, a ki a hegedűjátékban többre vitte.[4] Ezalatt szerzi meg kétes hasznú nagy gyakorlottságát a vívásban.

Az akadémia a meghatározott évi díjért a növendékeket úgyszólván mindennel ellátta. Teljes élelmezésen kívül, ruhát, orvosi segítséget, gyógyszert, kézikönyveket, író és rajzszereket adott.[5] Ezeket fedezte a gr. KEMÉNY MIKLÓS segítsége. De jól foghatott ezen felül is némi zsebpénz. Szép bizonysága annak a rokonérzésnek, melyet JÁNOS maga iránt ébreszteni tudott, hogy volt tanítója Cs. SZILÁGYI JÓZSEF, szegény fiú létére két év alatt 40 rh. forintot küld neki.[6] Az atyja is ad, a mennyi telik. De csak keservesen tud időnként 10—20 frtot küldeni.[7] Gr. KENDEFFI ÁDÁM a Göttingára igért segítség helyett mostan ad 250 frtot; a mi a lovaglás tanulására kellett.[8] Ezért ugyanis külön fizetés járt, hónapjára 19 frt.[9]

Bár az akadémia rendtartása szoros volt, mégsem válhatott egykönnyen B. JÁNOS-ból egyoldalú katona.

Társaságban nem szenvedett hiányt János. A már említett gr. KEMÉNY időnként, fentartózkodása alatt bizonyára szívesen látta magánál. A gróf

---

1 GATTI i. h. 491. l.

2 BOLYAI F. levele 1820 ápr. 4-ről.

3 BOLYAI-BODOR levelek. Math. és Phys. Lapok XI. köt. 217. l. 1821 márcziusról.

4 U. ott.

5 GATTI i. mű I. köt. 416. l.

6 BOLYAI F. levele 1821 jan.—augusztusról.

7 BOLYAI F. levelei 1818 szept. 10., 1820 ápr. 4.: «Magamnak egy krajtzárom sem marad», 1821 szept. 10., 1821 okt. 1.

8 BOLYAI-BODOR levelek i. h. 218. l. 1821 jul. 15-ről és fiához 1821 szept. 10.

9 GATTI i. mű I. köt. 425. l. (1804-ből).

TELEKI ELEK házánál is sokat volt, a ki mellett SZÁSZ KÁROLY nevelősködött. De voltak atyjának ismerősei, állandóan ottlakó, előkelő hivatalnokok: SZENTGYÖRGYI IMRE és BODOKI SÁMUEL, a kiknél meg kellett fordulnia.[1] Tanárai közül WOLTER VON ECKWEHR JÁNOS századossal állott legszorosabb összeköttetésben. WOLTER, a ki a mathematikát és geometriát tanította,[2] épen 1818 őszén került az intézethez.[3] Irodalmi téren bár nem szerepelt, mégis annyira becsülte B. János az ő tudását, hogy Appendixének első fogalmazását 1825 vagy 1826-ban neki adta át.[4] Mint mérnök kiváló lehetett. Ezt mutatja az, hogy hosszabb időn át ő vezette a tiroli határszélen *Franzensfeste* építési munkálatait.[5] Később is fenmaradt benső barátságról tesz bizonyságot JÁNOS-hoz intézett levele.[6] Az intézet akkori idősebb tanárai közül LENKER MIHÁLY őrnagyot becsülte, a kihez atyja így utasítja mathematikai kérdésekre nézve: «LENKER-t absolute használd, megfogod bánni ha elmulatod.»[7] Világos előadású tanár lehetett, kézikönyvei után itélve, a ki tárgyát, a felsőbb geometriát és mathematikai földrajzot alaposan értette.[8] Az intézet növendékei számára írott «*Mathematikai Földleírás*»-ában csinosan és világosan tárgyalja, kivált a földfelület ábrázolási módjait.[9] Említhetjük még BRASSEUR SÁNDOR őrnagyot, a mechanika és fizika

---

1 Említi B. FARKAS 1818 szept. 10., 14., u. év okt. 17., 1820 ápr. 4-én kelt leveleiben. Az elsőt B. FARKAS-né is 1818 deczemberből.

2 L. BOLYAI J. feljegyzéseit; idézi: STÄCKEL P. A nem-euklidikus geometria története stb. Math. és Természettud. Értesítő. 1900. XVIII. köt. 252. lap.

3 GATTI i. mű I. köt. 482. l.

4 L. STÄCKEL i. h. 252. l.

5 WOLTER v. ECKWEHR János [1791—1857.]. Szép katonai pályát futott meg, a melyen altábornagyságig emelkedvén, Krakkóban halt meg. A mérnök akadémiának 1842—1850. igazgatója volt. L. GATTI i. mű I. köt. 683. l. Az itt említett többi adatokra nézve is l. u. ott.

6 Graz, 1831 november 2-ről. E levelet újabb közleményem mellett fogom kiadni.

7 B. FARKAS levele 1820 ápr. 4-ről, u. ott még: «Próbáld meg L. urat».

8 LENKER MIHÁLY [1778—?]. Az intézetnél már 1804-ben tanít és 1833-ban még ott működik. Több a maga idején becses (gediegen) kézikönyvet szerzett az intézet számára. 1839-ben mint czimzetes vezérőrnagy lép nyugalomba. (GATTI i. mű 426., 505. l., részletesebben 381. l.)

9 LENKER kiadta újra dolgozva a HAUSER 8. lapon említett kézikönyvének III. kötetét: *Einleitung zur höh. Geometrie* Wien 1816. (a M. T. A. könyvtárában). Azonkívül megjelent tőle még «*Anleitung zur Mathematischen Erdbeschreibung*» Wien, 1818. (A bécsi műegyetem könyvtárában.) Több munkájáról nincs tudomásom. GATTI könyve még ezeket sem említi.

tanárát, a kinek hatását, ugyan B. Jánosra nem mutathatjuk ki, de mint szorgalmas és alaposan készült tanárt említik.[1]

Tehetséges tagja volt a tanítótestületnek HAUSLAB FERENCZ hadnagy, a tereptan és helyszínrajz tanára. Őt 1819-ben osztották be az akadémiához, a hol tanári tevékenysége minden tekintetben kiváló volt. A térképrajzolásban nálunk először ő alkalmazta a rétegvonalakat. Katonai és tudományos téren egyaránt fényes nevet szerzett. A maga idejében az osztrák hadsereg legtudósabb tisztje volt. Reánk, magyarokra nézve azt a szomorú dicsőséget szerezte, hogy 1849-ben mint HAYNAU altábornagy seregének tűzérségi parancsnoka, a szőregi és temesvári csatákban megtörte a magyar tűzérség addigi fensőbbségét.[2]

Az atyai szeretet, gond és aggódás a távolból is folytonosan kíséri JÁNOS-t, akadémiai tanulása alatt. Más helyen említjük meg, mennyiben támogatta FARKAS szaktanulmányaiban útmutatásokkal. Itt arról számolunk be, hogyan törekedett az édes atya fia erkölcsi és jellembeli fejlődésére hatni?

A JÁNOS gyors haladása és fényes sikerei voltak az édes apának jóformán egyetlen vígasztalása ezen időben. Súlyos éveket és hónapokat töltött szerencsétlen felesége mellett. Mind sötétebben borul a szegény asszony lelkére az éj homálya, testét is sorvasztó kór gyengíti. Végül a halál 1821 szeptember 18-án megváltja szenvedéseitől.[3]

Megható gyöngédséggel értesíti Jánost e csapásról, így vígasztalván: «nyugodj-meg az örök rend folyásán; adj egynehány könnyet Édes-«Anyád meg-nyugott porainak; folytasd férfiui módon pályafutásodat! — «hogy nem sokára úgy ölelhesselek meg, hogy tsak az fájjon, miért «nincs Édes Anyád-is ott; 's a' midőn őtet is sziveinkből ki-hozza egy «könny, mind a ketten meglássuk őtet is egymás szemeibe.»[4]

---

[1] BRASSEUR SÁNDOR [1776—1844.]. Az akadémián 1802—1834-ig a mechanika és fizika tanára. Írt kézikönyvet a «Mechanika és hydraulikå»-ról. Tanári működéseért nemességet nyert. Az akadémia igazgatója 1834—1842. Mint vezérőrnagy ment nyugalomba 1842. (GATTI i. mű I. köt. 373. l.) Könyvét nem sikerült megkapnom.

[2] HAUSLAB FERENCZ [1798-1883.]. Többféle külön megbizásban kitünteti magát. Az akadémián 1819—1832-ig tanár. Kitünő régiségbuvár és nyelvész. Több tudóstársaságnak is tagja. Mint altábornagy halt meg Bécsben. (WURZBACH: Biogr. Lexikon. 8. Th. Wien, 1862. 90—92. l. és GATTI i. mű I. köt. 689—690. l.)

[3] Ez a helyes dátum. L. BOLYAI F. levele 1821 okt. 1-ről. V. ö.: SCHLESINGER: Bolyai János. Math. és Phys. Lapok XII. köt. 62. l. és BEDŐHÁZI: A két Bolyai 81—82. l.

[4] U. azon levél és BEDŐHÁZI i. mű 84. l.

A fia egészségét illető jó tanácsok is sűrűn fordulnak elő. Ezekben néha túlságosan aprólékos is.[1]

Az időnek kellő felhasználására is nyomatékosan figyelmezteti: «Hova tovább azt hiszem, hogy nagy Mathematikus tsak a' lehet, a' ki «excellens elmével jókor, jó moddal hozzá fogva, serdülő korába ollyan «helyt, a' hol mint a méheknél tavasszal egy az igyekezet, szünetlen valo «hosszas gyakorlással, mint a' nyelvbe, ollyan készséget kap.»[2] Midőn a VI. osztályba lép János, megismétli újra: «El-folynak az esztendők 's «semmit se hagynak annak a' ki nem nézve ki az okosság perspectivá-«jával [=messzelátó cső] a jövendő vidékeire, tsak a' jelenvalo virágait «szedi — jaj annak, a' kinek az el-mult időket, tsak tett pusztításaik «mutatják — 's szerentsés; a' ki meg-tudta az esztendőket tartani, mint «az élőfa mindenikbe egy-egy karikával vastagodva —»[3]

De legtöbbet aggódik azon, hogy fia az erkölcsi tisztaságot őrizze meg: «az első lépéstől irtozz, mert a' meredek' széléről bé feneketlen «az örvény, 's meg-állani többé nem lehet — őrizkedj az ollyan mo-«tsoktol, mellyet ki-törleni többé, nem lehet . . . Tsak az virágzik-ki tes-«tében 's lelkében, 's az érik-meg férjfiuvá, 's annak van ereje, akaratja «és álhatatossága, 's tsak ugy ég a 'séni [=génie] lángja szépen tisztán «s tartosan, ha annak forrása mennyei tisztaságába marad.»[4] A mint közelg az akadémiából kilépés ideje, ezek az intések mind sűrűbbek lesznek: «Őrizd meg a' te tisztaságodat! Szünetlen vigyázva, hogy az «égből gyult tűz mint a' Vesta templomába ki ne alugyék — minden «szikrája a' földi örömnek melyröl le-mondassz, mint egy örök világu «tsillag ugy fog ragyogni életed ezutáni vidékei egén.»[5]

Másutt, mintha csak a jövendőt sejtette volna meg az aggódó atya: «Én tégedet a Duellumtól féltelek leginkább 's a fejérnépektől.»[6] Azonban úgy érezzük, ilyen és ezekhez hasonló intésekkel czélját nem érhette el; az áradozó nyelv, a költőileg kiszínezett képek inkább éleszthették az ifjúkor vágyait, mint csillapították.

János az akadémia rendes osztályait 1822 szeptemberben végezte el;

---

[1] B. FARKAS, majd mindenik levelében.

[2] BOLYAI F. levele 1818 szept. 10.

[3] BOLYAI F. levele 1820 okt. 5.

[4] BOLYAI F. levele 1819 szept. (töredék).

[5] BOLYAI F. levele 1820 okt. 5-ről.

[6] BOLYAI F. levele 1822 nyarán. Nem ez az egyetlen dolog, a miben B. F. megsejtette a jövendőt. V. ö. a nem-euklidikus geometria dolgában adott utasítását. (STÄCKEL P. . Math. és Természettud. Értesítő 1900. XVIII. köt. 252. l.)

azután mint mérnökkari tisztjelölt még szinte egy évet töltött annak falai között.[1]

A mérnökkari tisztjelöltek sorába ekkor 19, VII. osztályú növendék közül *hét* jutott be, közöttük JÁNOS a második.[2]

Erre nézve nem érdektelen tudnunk, hogy a mérnök akadémiában a kilépő növendékek érdemsorának megállapítását a tanárok és a növendékek közösen végezték. Az osztály kijelölte az öt legjobb növendéket, a kik épenugy mint két tanár, irásban szavaztak. Az igazgató szerint, a növendékek itélete «ilyen esetekben, mint részrehajlatlan és alapos, teljesen bevált».[3]

A tanárok — közöttük LENKER őrnagy is — JÁNOST tették elsőnek, azonban a növendékek második helyre sorozták. Az igazgató ebben megnyugszik, mivel szerinte: «BOLYAI elsőségét csak az erődítéstanra és a polgári építéstanra kell érteni, mert nem terjed az ki a többi tudományszakban szerzett ismeretekre, melyekben a III. osztálytól kezdve állandóan CZERMÁK foglalta el az első helyet.»[4]

A bizonyítványokból úgy látszik, hogy JÁNOS versenytársa a szépirásban és rajzolásban volt ügyesebb, ellenben földrajzban már JÁNOS jobb, a többi tárgyból ugyanazok az osztályzatok.[5] JÁNOS utolsó bizonyítványa[6] önmagában tekintve is fényes, de azt mutatja, hogy a történelemben, francia nyelvben, német fogalmazásban és rajzolásban egy fokozattal gyöngébb eredményt ért el, mint a többi tanulmányokban.

Azonban nemcsak ezt viszi onnan magával, már erőben van új geometriája is. Ennek az intézetnek köszönhette BOLYAI JÁNOS azt a mindennél becsesebb rendes és nyugalmas életet, melyben nagy felfedezésének eszméje kicsirázhatott és fejlődésnek indulhatott.

*Szabó Péter.*

---

[1] Kinevezési okmánya kelt 1822 szept. 7-ről, rangja szept. 9-től számított. V. ö. GATTI i. mű I. köt. 725. l. (148. lap. [2] jegyzetben idézve) és SCHMIDT F.: Bolyai életrajzát. (SUTÁK-SCHMIDT: «A tér abszolut igaz tudománya». XXVII. l.) BEDŐHÁZI: A két Bolyai 418. l.

[2] JÁNOS kir. berczeg előbb is említett rendelete a tisztjelöltek kinevezéséről. (1822. szept. 7-ről.)

[3] Br. HERZOGENBERG A. felterjesztése a végzett növendékek kinevezése ügyében JÁNOS kir. herczeghez. (1822. szept. 6-ról.)

[4] Ugyanott.

[5] «*Verwendungs-Liste der Zöglinge für den Lehrkurs 1821/22.*» Az itt idézett iratok a cs. és kir. közös Hadügyminiszterium levéltárában vannak. (*Genie-Akten* 1822. 16/178. jel alatt). Az említett CZERMÁK JÓZSEF rövid katonai pályafutás után mint főhadnagy halt meg 1828-ban (l. *Gatti* i. mű I. köt. 722. lap.)

[6] Ezt a bizonyítványt l. a *VII. Mellékleten.*

# MELLÉKLETEK.

## I. Bolyai Gáspár — Bolyai Farkashoz.[1]

*Bolya, 1803 január 9.*

Édes Kedves Fiam!

Kolosvárrol 15-dik Decembris irt és hozzám bocsátott kedves Leveledet ez follyo Januar 6-dik Napján annál nagyobb Atyai örömmel vettem, hogy belölle nem tsak azt értettem meg, hogy Isten kedves Feleségedet, Jó Menyemet szerentsésen megszabaditotta, hanem egyszersmind, ő Felsége egy ép szép és nagy Fiuval szeretett bennünket. — Áldott légyen az Úrnak neve érette, nevellye Isten maga Ditsőségére és mindnyájunknak kívánt örömünkre. Már alig várom, érhessem abban is örömömet, hogy láthassam. De vallyon hogy beszéllyek vélle, és hogy töltsek időt, de meg tanit az ösztön: különben is Groff Tolditól sok[at] tanultam, hogy bánik az unokájával. Éppen ma is ő Nagyságánál lévén ebéden. Mint az öreg Groff szóllott az unokájához: kérdi az az Ifiu Groff Toldi Sámuel. Hát már az Ur hogy beszél az Unokájával........ De ezt ebben hagyván, tisztelem az Urat és az Asszonyt, tsokolom Susikádat, kedves Menyemet, ki minden betsületre magát annyival is inkább érdemesitette valamint mások előtt, ugy nevezetesen előttem is, hogy nékünk szerentsés szabadulásával egy ollyan tökélletes örömet hozott. El hiszem Pataki Ur Ötsémnek és Ifiu Aszszonynak, kedves Hugomnak, nem különben Lajinak kiket szivesen tisztelek, Lelkeket, sziveket megtöltötte a kis Atyafi örömmel.

A János nevet annyival inkább approbálom, hogy a Familiánkban sok János vólt, ugymint az Atyám nagyobb Testvére János volt, a nagy Atyám Gábor, annak attya ugyan János, annak György, annak György, annak megint János, annak Sigmond etc. Nb. Megint 2-dik Jánosnak Felesége volt Almási Ilona. Joszága vólt Hidalmáson, Kis-Petribe. mint régi Relatoriával bizonyítani lehet. Kabos Gáspárnak egy levelével lehet bizonyítani, hogy régen egy Somborival osztozott.

Ennek a Bolyai Jánosnak több Bolyai Levelek között egy Testamentuma van a kolosvári káptalanban, melly az Elenchusból ki tettszik Sub Littera B. Minthogy Széles Mihály Requisitor nékem jó Barátom volt,

---

[1] Ez a levél nem csak a JÁNOSRA való vonatkozása miatt érdekes, de azért is, mert a B. GÁSPÁR gondolkodás módjának ismeretéhez adalék. *(A Magyar Tud. Akadémia kézirattárából.)*

az ő Segedelme által sokszor akartam megnézni és kitanulni belőlle Continentiáját. De addig halogattam, míg ki fogytam az időből. A vala feltételem aránta. Ha valami hasznos dolgot tanulhatok belőlle Requisitorium Mandatum mellett ki irassam. Vannak ott a Kemény nevezet alatt is Bolyai Levelek; B. Kemény Simon Ő Excellentiájánál láttam rolluk az Extractust. Másoktól pro hic et nunc praetendálva. Jó lenne abba modot találni, hogy azt a Testamentumot lehessen meglátni és continentiáját ki tanulni. Ezt el se is mulasd most jó modod van benne az öreg ui által.

Én Fiam még élek, hanem ez előtt két héttel az erdőre menvén ujra le estem a fájos oldalomra, és annyira fájt, hogy a Pleuritistól féltem, de már kőnnyebben vagyok.

Antalt[1] már rég nem láttam, Kakutsival valamely hasznos expeditioban van; Kápdébo Cridába esett és Sententia mellett ellene Executioba mentek. Szolgája nints, nem is kaphattam még eddig Szolgát Néki. Efféle bajod néked is lesz Domáldon. Én Fiam el rugoszkodtam vólna oda, mert hallottam boraidban is sok kár esett, folyt mindenik, de nékem nem volt semi modom benne. Félek nehezen distráhálhatod őket, mert ott kitsiny ára van a bornak, a mint hallom.

Groff Toldi tsak várja az ide való Fö Ispányságot le akarván mondani a Közép Szolnok Vármegyei Fö Ispányságáról, de még nem jött le semmiféle Resolutio.

Az Ifiu Groff Toldi Samuelnek már egy Fia és Léánya van.

Én a szölöbeli lakást oda hagytam, le jöttem az uj kö Házaimba, és már bennen lakom Antallal edgyütt sok költségünk után. Már tsak Tsürt tudnék épitettni. Maria bé állott szolgálonak Báro Miske Salkai udvarába jó fizetés mellett, nem tudom, hogy viheti ki Esztendeit. Szeretném hallani, kitsiny Jánoskát ki tartotta kereszt Viz alá elhiszem arra Sokan találkoztak, de azon kötelességet leginkább szerettem volna Méltoságos Báro Kemény Simon és Méltoságos Groffnéja ő Nagyságoknak deferálni.

Ezzel Isten éltessen Édes Gyermekeim, többet ez uttal nem irok hanem a bé állott Új Esztendőnek minden részeit közönségesen szerentséltetem, és vagyok

*Bolya* 9-dik Jan. 1803. szerető Édes Atyád

*Bolyai Gáspár* m. p.

[1] Másik fia: BOLYAI ANTAL, ki megyei hivatalnok volt.

## II. Bolyai Farkas följegyzése 1812-ből.

Született 1802. 15a X.-bris este 9 órakor.

Jánosnak gyermekkori allapotjából eszembe jutott holmi jegyzések, mellyeket teszek 9 esztendős korába.[1]

Tsetsemő korában oltvaros volt.... (NB. jó forma de szerelmes s' mérges ifju asszonynak tejét szopta.)

Hét esztendős kora táján a' Doctor holtszenes kenőt adott az oltvaros fejire tsászár szakáll théával (akaratom ellen az elsőt) hirtelen megszáradt az oltvar, nem sokára a' szeme alá tumor cisticus lett. 9 esztendős korába azon felin lévő álla alá golyva forma lett, mulik terpentin olajas linimentum-volatileval.

Beteges nem [igen] volt.

Szopott 9 holnapig. Beszéllni járni kezdett úgy emlékszem másfél esztendős korában.

[.......................][2]

Négy esztendős korába esmerte a' corpus geometricumokat: circulus, centrum, radius, Ellipsis, s' a' többi, sinus. — Egyszer asztalnál fel-kiáltott a' pityokát szelven: Hi Táti! mit kaptam; pityoka arcusnak pityoka sinussát — s' helyes volt.

Öt esztendős korába a' mint kementzét raktam azt mondja, hogy a' kályhákat ki kellenék forditani, hogy jobban lehetne seperni s' melegebb volna.

A' tájba ház meszeléskor azt mondja hogy már a' ház kissebb lesz... s' utoljára a' házba nem térünk el.

Olvasni kevés mutogatásra tsak nem maga tanult-meg hat esztendős kora táján.

7 esztendős korába, tanulni kezdett németül s' musikálni. Geometriát s deákot 9 esztendős korába rajzolni tizedfél esztendős korába, de [az utobbiban][3] nem haladván félbe-maradt.

Most quartettekbe primot hegedül tactussa jó van s' sebessége is nagy.

A' tactusra tavaly tanitottam meg, büntetésül tévén ha meg nem tanulja azt hogy szőllőt nem eszik szüretkor.

A' bassusba belé-szeretvén azt mondotta eggy Domáldi uton, hogy

---

[1] A feljegyzés korát még a papirra előbb más kéztől irott, következő dátum is mutatja: *Agropoli, die 25-a Junii anni 1812.*

[2] Itt 6 kitörült sor, melyeknek kibetűzése ugyan sikerült, de közlésük feleslegesnek látszik.

[3] Bolyai János közbetoldása.

ha lehetne ollyan nagy hegedüt tsinálni, mint a' Korodi hegy, hurjai mint eggy láb 's emberek tántzolnának rajta.

Ezen aetássába minden külső életbeli dologra űgyetlen, hátul öszve fogott kezekkel sétálva bandalog, a' mig mi dolgozunk — ugyantsak a' ki szabott orákon a' kertbe dolgozik.

Geometriai formára szereti a' tégla s kö darabokat surolni, s' szereti a' szép kőveket gyüjteni, s' egy peggyesért[1] kész a' kert fenekéig futni. —

Tiz esztendős korába componálva s' leirva találtam valami Adagio s' Allegrokat, mellyekbe mind volt valami, nem tsak gondolat, méllyetske érzés is.[2]

[11 esztendős korába az Annya meg nem engedvén valamit — a' kis konyhába a' szolgálok közt monologizált igy —

Ha Király volnék az Anyámat megöletném s' a' tanítommal nyársba huzatnám (még volt egy ollyan Király) s' 9 esztendeig hagynám az ég alatt, hogy a' varjak a' fejin károgjanak. —

Azután a kertbe hátra ment s' imádkozott s' béjött s' az annyától engedelmet kért — s' azt mondotta, hogy látta hogy *őt hátba*[3] akarta rugni.

Azután a szolgálokat megeskette a' halgatásra, töllem megintettetvén.

Rollam ugyanabba az indulatjába azt mondotta, hogy nekem rettenetes nagy gyémánt koronát tsináltatna.]

Szinte 12 esztendős korába a' palánkra, melly alatt van a kripta ablaka, azt irta: A' boldogok lakhelye.

12 s fél esztendős korába már a' Vega 2dik darabjába a' Conica sectiokat elvégezte s' ora után mind madár fészek után mászott s' gyönyörüséggel nézte a veréb tojásokat.

## III. Bolyai Farkas feljegyzése 1817-ből.

*Bolyai János* született [1802]. 1817be 13dik Augustusba illyen nevendék: A' tudományok' s különösön a' Mathesis tanulására nagy

---

[1] *Peggyes* (v. *Peggy*): kapócsont, bárány bokájából vagy térdéből való csontocska, őt ilyennel *peggyeseznek* a gyermekek. (Szinnyei, Tájszótár II. k. 106. l.)

[2] A [. . . .] közé foglalt sorokat itt, valamint előbb is B. János az eredeti kéziratban kitörülte. Kibetűzésüket dr. Kossutány Tamás, orsz. chemiai intézeti igazgató szakértői tanácsa tette lehetségessé. Innen kezdve végig a kézirat nyilván későbbi toldalék.

[3] Kétes olvasás.

hajlandosága van. A' musikákba 's különösön a hegedübe virtuosus lehet. A' rajzolásra is van egy kevés hajlandósága. A' Poëzisbe nem vette semmi hajlandóságát észre. Meglehet, hogy ezután lessz. A' nyelveket könnyen tanulja. Ezek mind természeti ajándékok. Szép itélő tehetsége van mind az emberek közt mind egyebekbe. Nem formátlan. Launicht, ugy hogy tanulásbeli kötelességét némelykor nem tellyesiti, némelykor igen tanul reggeltől estig, egéssége kárával is, mely hiba: μηδὲν ἄγαν. Némelykor igen hypocondriakus némelykor igen levis ollyan okbol is, a' mit más nem lát. Szereti másokat secirozni, ugy hogy ritka emberrel nem jö öszve. Ez éretlenség. Némelykor engedetlen kivált az annyának, mely a' nevelés hibája. Mindazáltal megjobbithattya, ha akárja. Másokat nem rágalmazo, ha jot nem tud valakiröl mondani, semmit sem mond. Nem hazug. Az igazságot nem engedi, a' mely nem prudentia. Szánakozo, a mikor nem segithet is. Háládatos. Senkit hibájáért, nem utál. Jo szivü. Haragos a' mig elfelejti a' megbántatást. Nem fantlis.[1]

Itt vagynak hibák és jóságok, az Isten adgya hogy a' hibák egy két esztendő alatt légyenek ellenkezők, a' joságok pedig maradjanak meg.

## IV. Bolyai János latin dolgozata 1817-ből.

*Stylus.*[2]

Ineuntis ætas adolescentiæ imprimis notatu digna. Tum si viam ingressus sis[3] rectam longe profecto in virtutis curriculo progredieris, licet vita brevis sit. Sin autem a via recta aberraris, et aliquandiu procul vagatus sis[3] scopo, mox cum erroris conscius fueris, viam rectam non nisi quæsivisse magna constabit industriâ, atque nec summo studio multa assequi potueris.[3] Magnis fortunæ adfectus muneribus adolescentulus afui, qui providi dei gratiâ parentibus educatoribusque usus viam rectam ei jam initio ostendentibus, multo tamen majoribus,[4] horum

---

[1] Fanti, székely szó = bolygó eszű, féleszű, fancsalgó, tekergő (Czuczor-Fogarasi: Magyar nyelv Nagy Szótára II. k. 598.) *a)* horgas lábú, félszeg járású, *b)* féleszű. (Szinnyei: Tájszótár I. k. 542. l.)

[2] Bolyai J. írása 1817-ből. Később írta rá: A' subscriptiobeli stylusom Bolyai János m. p. — A következő szakszerű megjegyzéseket dr. Geréb József szivességének köszönöm.

[3] Ezen helyeken *ingressus eris*, *vagatus eris*, ill. *poteris* volnának helyesek. mert a megfelelő főmondatban *futurum imperfectum* van.

[4] Nem szabatos.

præceptis observantiam tribuens et recta titubasse [1] cavens viâ. Themistoclem minime tam fortunatum fuisse a Nepote traditum, quippe qui peradolescentulus et [2] liberius vixit, et magis sui judicii fuit, atque [3] a patre probatus fuisset: contra ea [4] mature ad sanitatem rediisse videtur, vitiaque magnis emendasse virtutibus; tantusque post[ea] vir evasit, ut ætate primus sua omnium respectu prudentiæ [4] Grajûm poneretur. Quantus fieri vir talis potuisset; nusquam si a via recta deerrasset: tum forte amore studioque justitiæ æquitatisque laudis Aristidis sive Epaminondæ compos fuisset. Præcipue itaque conandum: [4] a virtute nec minimum aberrare.

## V. Bolyainé Benkő Zsuzsánna — Bolyai Jánoshoz.

*Kolozsvár, 1811—1816.*

Kedves Fijam!

Nagy örömet szerzek néked mert a Collektziodat szaporitom egy stufával melyet Bodor [5] Urtol kaptam légy azért jo gazda a háznál gyüjts nekem sok pénzt de ugy hogy a szilva ne apadjon mert szilva iznek is kel néked egy szomoru ujságot irok itt egy fijutska a kutba holt mingyárt te jutottál eszembe hogy sokszor szollitottalak ne üly a kut gárgyájára képzelheted annak az szegény Anyának szomoruságát — Josi [6] frisen van köszönt én is Vajda [7] Urat Kovátsér[t] tisztelem vagyok

Édes fijam szerető Anyád

*Benkő Zsuzsánna.*

## VI. Bolyainé Benkő Zsuzsánna — Bolyai Jánoshoz.

*Maros Vásárhely, 1818 decz. közepén.* [8]

Édes Jo Fijam!

Ez a néhány rend tsak potlékja az Édes Apád levelének, Néked szerentsés boldog Uj Esztendőt kivánok áldást a Mindenek Atyától a

[1] *Titubasse;* recte *titubare* vagy *ne titubem.*

[2] Az *et* felesleges.

[3] *Magis . . . atque* (recte: *quam*).

[4] Magyarosságok: *contra ea, respectu prudentiae, conandum* után infinitivus. Az utolsóban felszólító mondat volna a latinos.

[5] Bodor Pál.

[6] Pataki József, rokonuk.

[7] Vajda Dániel, János első házi tanítója.

[8] Ez a levél B. F.-nak egyik levele utolsó lapjára van írva, az üres féloldalon. Az utóbbi levél többi része nincs meg.

te fejedre, nevekedést a' joban, erősődést a Virtusban, Isten s emberek előtt valo kedvességet remély Édes Fijam! ez az erő lelkesitsen tégedet, a' te ki-szabott Esztendejid észre vehetetlenűl el telnek; 's mikor én is egy Derék Hazafit fogadok karjaim közzé, akkor a' te éretted esdeklő Anyának könyei le-töröltetnek — tsak jelen való kötelességedet telyesitsd; ezt a rajzolásra s minden egyebekre nézve értem. Oh Édes Fijam! nem mindenkor van az embernek kedve sok dologhoz, de hozzá kel szoknunk jo idején azt tennünk a' mihez telyeségel nints [kedvünk [1]] igy gyakorlodik a' mi virtusunk; mert a kötelesség akár mely keserű, édességet hoz a' szivbe; s nyugodalmat a lélekbe, hogy azt tette az ember, a' mit kellett. tudosits mihelyt ezen leveleket veszed, ha tsak lehet még az első postán, nyughatatlanságunkat tsendesitsd meg; tavasz süt ha rollad jót hallok; örökös tél borul elömbe az ellenkezö esetbe. Szengyörgyi Urat igen szivesen tisztelem. Jakab Laji ohajtja leveledet én is nyughatatlanul várom válaszodat addig is az Én Istenem légyen Veled

tsokolván szerető *Édes Anyád*

Édes Nagy Anyád hasonloképpen.

## VII. Bolyai János akadémiai utolsó bizonyítványa.

KIVONAT

a cs. kir. Mérnök-Akadémia VII. osztályú növendékeinek 1821/22. évre szóló alkalmazási-jegyzékéből.

*Sorozati szám : 2.*

*Név : Bolyai Bolyai János.*

| | |
|---|---|
| *Tehetség* | kiváló. |
| *Szorgalom* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Előmenetel a tanulmányokban :* | |
| *Franczia nyelv* | I.-rendű. |
| *Német fogalmazás* | I.-rendű. |
| *Szépirás* | jó. |
| *Mathematika és algebra* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Egyszerű geometria* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Felsőbb geometria* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Mathematikai földrajz* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Történelem* | I.-rendű. |
| *Földrajz* | I.-rendű, kitüntetéssel. |

---

[1] B. F. irásával beletoldva.

| | |
|---|---|
| *Hittan* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Mechanika* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Kisérleti term.-tan* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Helyszínrajz* | I.-rendű. |
| *Geometriai rajz* | I.-rendű. |
| *Polgári épitéstan* *elmélet* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Polgári épitéstan* *rajz* | I.-rendű. |
| *Hadászat* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Erőditéstan* | I.-rendű, kitüntetéssel. |
| *Magaviselet* | I.-rendű, kitüntetéssel. |

Mérnök-Akadémia, 1822. szept. 6.

*Br. Herzogenberg Ágost* s. k.,
cs. k. vezérőrnagy és a
mérnök-akadémia igazgatója.

(P. H.)

*

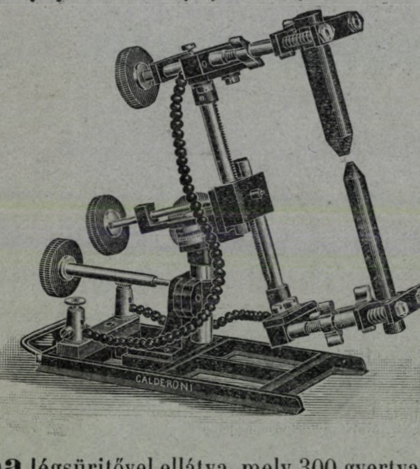
*Jegyzet.* A következő, 1822/23. év végén, mint mérnökkari tisztjelölt csekély eltéréssel, ugyanezt a bizonyítványt nyerte. Eltérések: *Tehetség:* igen jó, *Német fogalmazás:* I.-rendű, kitüntetéssel, *Magaviselet:* I.-rendű. Azonkívül külön *Erődítéstan I. rész* és *II. rész:* I.-rendű kitüntetéssel.

# Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.




**Elektromos ívlámpa** legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5–50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—

**Elektromos ívlámpa** egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

**Borszesz-izzófénylámpa** légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

**Háromlábu asztalállvány,** mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110**.—

**Vetitési ernyő** finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

**Ernyő-állvány** fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30**.—

**Vetitési ernyők** zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

| | 200 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 cm. négyzetben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ára | **45.**— | **65.**— | **90.**— | **145.**— | **200.**— | **240.**— korona. |

**Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.**

*Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.*

Franklin-Társulat nyomdája

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENKILENCZEDIK ÉVFOLYAM

IV. FÜZET 1910 ÁPRILIS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1910.

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A tizenkilenczedik társulati év 1910 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János-utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

*Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.*

**Rendes ülések.** A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

*Igen tisztelt munkatársainkat* értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

---

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

# INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK SOROZATAI.

(Első közlemény.)

## Bevezetés.

*Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* cz. dolgozatomban[1] mondtam ki és bizonyítottam be először azt a tételt, melyet a jelen dolgozat 5. fejezetében ismertetek és a mely köré a jelen dolgozat összes fejtegetései csoportosulnak. A tétel leglényegesebb pontja a következő: *Ha* $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots$ *az* $(a, b)$ *számközön értelmezett, valós függvényeknek normált, orthogonális vagyis olyan sorozata, hogy*

$$\int_a^b a_i(x)\, a_j(x)\, dx = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

*a szerint, a mint* $i \underset{=}{\neq} j$, *ha továbbá* $c_1, c_2, \ldots$ *a valós számoknak olyan sorozata, melyre* $\Sigma c_i^2$ *összetartó, akkor van olyan négyzetével együtt* Lebesgue *szerint integrálható*[2] $\xi(x)$ *függvény, hogy minden i-re*

$$\int_a^b a_i(x)\, \xi(x)\, dx = c_i.$$

---

[1] Paris, Comptes Rendus, 11 mars 1907. L. még *Über orthogonale Funktionensysteme* czímű dolgozatomat: Göttingen, Nachrichten 1907. pp. 116—122.

[2] Az integrálfogalomnak Lebesgue szerint való értelmezése tételünk érvényességének *elengedhetetlen* föltétele ép úgy, mint a hogyan például az arithmetika vagy az algebra egyes tételeinek érvényességéhez nélkülözhetetlen a számfogalom megfelelő kiterjesztése.

A tétel alkalmazhatósága különösen nyilvánvaló a függvény-analizis azon problémáinál, melyek természetszerűen vezetnek egy orthogonális függvényrendszerhez; ilyen problémák például azok, melyek egy-egy első vagy másodfajú lineár integrálegyenlettel függnek össze.[1] A tétel alkalmazási köre azonban sokkal tágabb. A tétel ugyanis *tökéletes kapcsolatot létesít az összetartó négyzetösszegű, megszámlálhatóan végtelen sok változó elmélete és a függvényanalizis megfelelő feladatai közt.* Ennek a legutolsó néhány évben hatalmasan kifejlődött elméletnek[2] minden egyes eredménye egy tetszésszerinti normált, orthogonális, teljes függvényrendszer közvetitésével tételünk alapján egy egy, a négyzetükkel együtt integrálható függvényeket illető eredménybe vihető át.[3]

Ezen az alapgondolaton épült föl a tételnek az az első bizonyitása is, melyet idézett dolgozatomban vázoltam. Fölhasználtam ugyanis azt a tényt, hogy a megszámlálhatóan végtelen sok változó analizisének egy, az orthogonális szub-

---

[1] L. E. Picard: *Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce et sur certains problèmes de Physique mathématique,* Paris, Comptes Rendus, 14 juin 1909; *Sur les équations intégrales de première espèce,* C. R. 28 juin 1909; *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique,* Palermo. Rendiconti, t. XXIX (1910). G. Lauricella: *Sull' equazione integrale di $I^e$ specie,* Roma, Rendiconti Accad. dei Lincei, vol. XVIII., serie $5^a$ (1909) pp. 71—75.

[2] D. Hilbert: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,* 4. u. 5. Mitteilung, Göttingen, Nachrichten 1906, pp. 157—227, 439—480; továbbá Hellinger, Toeplitz, Schmidt, Hilb, Weyl stb. dolgozatai.

[3] F. Riesz: *Über orthogonale Funktionensysteme,* l. cit.; *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm,* Paris, Comptes Rendus, 8 avril 1907; *Sur une espèce de géométrie analytique des fonctions sommables,* C. R., 24 juin 1907; M. Fréchet: *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires,* C. R., 24 juin 1907; *Essai de Géométrie analytique à une infinité de coordonnées,* Nouvelles Annales, S. IV., t. VIII (1908), pp. 91—116, 289—317; M. Plancherel: *Note sur les équations intégrales singulières,* Pavia, Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali 1909, pp. 37—53; *Über singuläre Integralgleichungen,* Mathematische Annalen, Bd. 67, pp. 515—518.

sztituczió megfordítását illető, szép eredménye alapján a tétel bármely orthogonális függvényrendszerre érvényes, ha csak érvényes egyetlenegy teljes rendszerre. Teljes a rendszer, ha nincsen olyan függvény, melynek négyzetintegrálja $\neq 0$ és a mely a rendszer minden függvényére orthogonális. Ilyen rendszert alkotnak például a $(0, 2\pi)$ számközön az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots,$$

a FOURIER-féle soroknál szereplő függvények; úgy hogy végeredményben a tétel bebizonyítása arra redukálódott, hogy az összetartó négyzetösszegű együtthatókkal formálisan képezett FOURIER-féle sor számára valamely *összegező eljárást* találjak, mely azután az illető együtthatókhoz tartozó függvényt szolgáltassa. Két ismert eljárásra sikerült megmutatnom, hogy az adott esetben czélra vezetnek. Az egyik a RIEMANN-féle: a sor formális integrálása, az integrálfüggvények összegezése és az összegfüggvény differencziálása; a másik pedig a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

harmonikus függvény az $r = 1$ körön való határértékeinek képezése.

Kevéssel a tételre vonatkozó első dolgozataim megjelenése után FISCHER, a ki a tételt tőlem függetlenül ismerte föl, annak egy új, egyszerű és érdekes bizonyítását közölte.[1] FISCHER a tételt mint a 6. fejezetben ismertetendő tétel egy esetét fogja föl; ez a tétel egyébként, bár tételünknél bizonyos tekintetben általánosabb, arra könnyen visszavezethető. FISCHER bizonyítása különben lényegben úgy jellemezhető, hogy ő LEBESGUE egy kevéssé ismert tételének alkalmazásával megmutatja, hogy a RIEMANN-féle eljárás (integráczió, összegezés, differencziálás)

---

[1] E. FISCHER: *Sur la convergence en moyenne.* Paris, Comptes Rendus 13 mai 1907.

bizonyos a FOURIER-féle sorokat felölelő általánosabb sortypusnál is czélra vezet.

Jelen dolgozatban a vázolt eredményeket új világításban mutatom be. Különösen két, itt még föl nem említett fogalom játszik majd fontos szerepet. Az egyik a négyzetükkel együtt integrálható függvények osztályára értelmezett *lineáris függvényoperáczió* fogalma. A lineáris függvényoperáczióról a 4. fejezetben bebizonyítom azt a különösen a függvénytranszformácziókról később közlendő vizsgálataimban fontos tételt, hogy annak értéke mindig *mint egy csupán az operáczíótól függő függvény és az operáczió tárgyát képező függvény szorzatának integrálja állítható elő.* Ebből a tételből, mely különben tételem segítségével ugyancsak a végtelen sok változó analizisének egy megfelelő eredményéből is [1] származtatható, könnyen következik a FISCHER-féle és vele az abban foglalt speciálisabb tétel is. A másik fogalom, mely a teljesen folytonos függvényoperácziók vizsgálatánál játszik döntő szerepet, az *integrálra* (egyszerűen) *való összetartás* fogalma (7. fejezet). Erre nézve többek közt egy a BOLZANO-WEIERSTRASS-féle tételhez hasonlító *létezési tételt* származtatok, melyből a FISCHER-féle tétel ismét nagyon egyszerű módon következik. Talán fölösleges is már kiemelnem, hogy ez a tétel ismét csak származtatható úgy is, hogy első tételünket a végtelen sok változó analízisének egy megfelelő eredményével kombináljuk.

A jelen dolgozatban alkalmazott módszerek egymáshoz való viszonya különösen akkor domborodik ki, ha eredményeinket olyan $[L^p]$ függvényosztályokra akarjuk kiterjeszteni, melyekre $|f(x)|^p$ integrálható. Ha $p>1$, úgy ezen módszerek segítségével összes eredményeink — a dolgozat élén álló tétel kivételével — megfelelő értelmezéssel az $[L^p]$ osztályra átvihetők. A mi azonban a megszámlálhatóan végtelen sok változó analizisével való kapcsolatot illeti, az a mint $p\neq 2$, már *csupán*

---

[1] E. HELLINGER u. O. TOEPLITZ: *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen,* Göttingen, Nachrichten 1906. pp. 351–355.

*az analogiára szorítkozik* és az analog eredmények többé egymásba közvetlenül át nem vihetők.

A dolgozatunkban ismertetett eredmények egyébként kiterjeszthetők több változó függvényeire is;[1] kiterjeszthetők továbbá valós változók *komplex* függvényeire is, mindenesetre csak olyképen, hogy *a négyzet helyébe az abszolut érték négyzete lép* és az orthogonalitás is ennek megfelelően úgy értelmeztetik, hogy az egyik függvény és a másikhoz *konjugált* függvény szorzatintegrálja 0. Erre az utóbbi, semmi nehézséget nem okozó általánosításra egy következő alkalommal lesz különösen szükségünk, a midőn majd az általános lineáris integrálegyenletrendszer tárgyalásával kapcsolatosan egy a FREDHOLM-féle egyenlet általánosítását képező 1 komplex paramétertől függő függvényegyenletet vizsgálunk.

## 1. Egyenlőtlenségek és integrálhatósági tételek.

Jelentse $[L^2]$ azon az $(a, b)$ közön értelmezett függvények összességét, melyek *négyzetükkel együtt* LEBESGUE szerint integrálhatók.

A

$$[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i]^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

CAUCHY-féle egyenlőtlenség segítségével az integrál értelmezéséből könnyen következik bármely két az $[L^2]$ osztályba tartozó $f(x)$, $g(x)$ függvényre az $f(x)g(x)$ szorzat integrálhatósága és az

$$[\int_{\mathfrak{M}} f(x)\, g(x)\, dx]^2 \leqq \int_{\mathfrak{M}} [f(x)]^2 dx \int_{\mathfrak{M}} [g(x)]^2 dx, \tag{1}$$

az $(a, b)$ köz bármely mérhető $\mathfrak{M}$ részhalmazára érvényes SCHWARZ féle egyenlőtlenség. A szorzat integrálhatóságából következik azután, hogy az $[L^2]$ osztályba tartozó függvények

[1] L. pl. idézett dolgozataim közül a *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm* czíműt.

*bármely homogén lineáris kapcsolata is az* $[L^2]$ *osztályba tartozik.* A SCHWARZ-féle egyenlőtlenség alapján könnyen származtatjuk a lineáris kapcsolat négyzetintegráljának értékelésére szolgáló

$$\Big[\int_{\mathfrak{M}} [\sum_{1=i}^{n} c_i f_i(x)]^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} \leqq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \Big[\int_{\mathfrak{M}} [f_i(x)]^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

egyenlőtlenséget. A (2) alatti egyenlőtlenség speczíális esete $\big(n=2;\ c_1=c_2=1;\ f_1(x)=f(x)-g(x),\ f_2(x)=g(x)\big)$ az

$$\Big[\int_{\mathfrak{M}} [f(x)-g(x)]^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} \geqq \Big[\int_{\mathfrak{M}} [f(x)]^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} - \Big[\int_{\mathfrak{M}} [g(x)]^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

egyenlőtlenség.[1]

### 2. Integrálható függvények sorozatai. A határfüggvény integrálhatóságának föltételei. Alkalmazások.

Ha az $(a, b)$ közön értelmezett $f_1(x), f_2(x), \ldots$ függvények mérhetők és az $\{f_i(x)\}$ függvénysorozat általában, vagyis legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével, az $f(x)$ függvény felé konvergál, akkor ez az utóbbi függvény is mérhető.[2] Ellenben az $f_i(x)$ függvények integrálható voltából még nem következik, hogy az $f(x)$ határfüggvény is integrálható.

A határfüggvény, illetőleg a függvénysorozat integrálhatóságának azok a kritériumai, melyeket maga LEBESGUE fejtett ki, ezen dolgozat czéljaira túlszűkeknek bizonyultak. LEBESGUE legáltalánosabb kritériuma, melyben a többi bennfoglaltatik, fölteszi egy integrálható *majoráns* függvénynek, vagyis egy olyan pozitiv integrálható függvénynek a létezését, melynél (abszolut értékre nézve) a sorozat egyetlen függvénye seholsem (illetőleg legfeljebb egy 0-mértékű halmazon) nagyobb.[3]

Dolgozatunk czéljaira nagyon használhatónak bizonyul a

---

1 L. E. FISCHER: *Sur la convergence en moyenne*, l. cit.

2 H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration* etc. p. 111.

3 H. LEBESGUE: *Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm*, Bulletin Soc. Math., t. 36 (1908), p. 11.

következő tétel, mely azonkívül, hogy a határfüggvény integrálhatóságának egy elegendő kritériumát adja, egyszersmind megengedi a határfüggvény integráljának egy, bár nem pontos, de sok esetben kielégítő lebecslését.

*Ha a nem negativ, integrálható $f_i(x)$ függvények sorozata általában az $f(x)$ függvényhez tart és ha e mellett létezik olyan G szám, hogy valamennyi $f_i(x)$ függvényre*

$$\int_a^b f_i(x)\,dx \leqq G,$$

*akkor az $f(x)$ függvény is integrálható és*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq G.$$

Ezt a tételt — kissé más formában — először FATOU fogalmazta meg és bizonyitotta be és pedig azzal a, mint látni fogjuk, fölösleges megszorítással, hogy az $f_i(x)$ függvények határoltak; az $f(x)$ függvény határolt voltát azonban FATOU sem tételezi föl.[1]

Egyébként tételünket ugyis fölfoghatjuk, mint tetszésszerinti integrálható függvényekre vonatkozó tételt, a melyek tehát nincsenek a «nem negativ» föltételnek alávetve; azonban ebben az esetben az $f_i(x)$ és $f(x)$ függvények abszolut értékeinek integráljai szerepelnek; természetesen $\int_a^b |f(x)|\,dx$ megbecslése a fortiori $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ megbecslését is szolgáltatja.

Mielőtt a tételt bebizonyitjuk, előre bocsátjuk a következő megjegyzést: Minden mérhető függvény, ha egyszersmind határolt is, okvetlenül integrálható; ellenben a nem határolt mérhető függvények nem mindig (mondhatnánk: általában nem) integrálhatók. Annak a föltételét, hogy valamely mérhető nem határolt függvény integrálható, valamint integráljának értel-

---

[1] P. FATOU: *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, Acta Mathematica, t. 30, p. 375.

mezését sokkal egyszerűbben fogalmazhatjuk meg, ha a határolt függvényekre értelmezett integrálfogalomból indulunk ki, mintha csupán a mérhető halmaznak és mértékszámának fogalmát veszszük alapul. Ha $c > d$ és $f(c, d; x)$ jelenti az

$$f(c, d; x) = \begin{matrix} c & f(x) > c, \\ f(x) & d \leqq f(x) \leqq c, \\ d & f(x) < d, \end{matrix}$$

előírások által értelmezett $f(x)$-szel egyidejűleg mérhető, de mindenesetre határolt függvényt, akkor $f(x)$ integrálhatóságának föltétele a

$$\lim_{\substack{c=+\infty \\ d=-\infty}} \int_a^b f(c, d; x)\, dx$$

határérték létezése; egyszersmind ez a határérték értelmezi az $f(x)$ függvény integrálját. Nem negativ függvény esetén ez a határérték azonos a

$$\lim_{c=\infty} \int_a^b f(c, 0; x)\, dx$$

értékkel.

Tételünket ezek után a következő módon bizonyítjuk be: Az $f_i(c, 0; x)$ függvények általában az $f(c, 0; x)$ függvényhez konvergálnak. Mivel továbbá az $f_i(c, 0; x)$ függvények *összességükben határoltak* és így LEBESGUE kritériuma alkalmazható, azért

$$\int_a^b f(c, 0; x)\, dx = \lim_{i=\infty} \int f_i(c, 0; x)\, dx \leqq G,$$

és pedig $c$ minden értékére. Vagyis

$$\int_a^b f(c, 0; x)\, dx$$

$c$-nek monoton, $G$-nél sehol sem nagyobb függvénye. Tehát a

$$\lim_{c=\infty} \int_a^b f(c, 0; x)\, dx$$

határérték létezik, $\leqq G$; ennélfogva $f(x)$ integrálható és integrálja $\leqq G$.

Alkalmazzuk tételünket a $\{g_i(x)\}$ függvénysorozatra, melyről fölteszszük, hogy négyzetükkel egyetemben integrálható függvényekből áll, hogy ezen függvények négyzetintegráljai mind $\leqq$ egy $G^2$ számnál; és végre hogy a függvénysorozat általában (vagyis legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével) egy $g(x)$ függvény felé tart. Akkor tételünk szerint a $[g(x)]^2$ függvény integrálható és

$$\int_a^b [g(x)]^2 dx \leqq G^2.$$

Maga a $g(x)$ függvény mérhető függvények határfüggvénye, tehát szintén mérhető függvény; és mint ilyen, minthogy négyzete integrálható, maga is az.

Meg fogjuk mutatni, hogy bármely az $[L^2]$ osztályba tartozó $h(x)$ függvényre

$$\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx = \lim_{i=\infty} \int_a^b g_i(x)\,h(x)\,dx. \tag{4}$$

Jelentsen $c$ tetszésszerinti pozitiv számot. Mivel a $c|h(x)|$ függvény, mely az összes

$$g_i(c, -c; x)\,h(x)$$

függvények majoráns függvénye, integrálható, azért Lebesgue kritériuma alapján

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b [g(c, -c; x) - g_i(c, -c, x)]\,h(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Jelöljük $\mathfrak{M}_c$-vel, ill. $\mathfrak{M}_{c,i}$-vel a $[|g(x)| > c]$, ill. $[|g_i(x)| > c]$ halmazokat. Mindkét halmaz mértéke $\leqq \frac{G}{c^2}$. A Schwarz-féle és a (2) alatti egyenlőtlenségek alapján tehát

$$\left[\int_a^b [g(x) - g(c, -c; x)]\,h(x)\,dx\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \int_{\mathfrak{M}_c} [g(x) - g(c, -c; x)]^2 dx \int_{\mathfrak{M}_c} [h(x)]^2 dx \leqq 4G^2 \int_{\mathfrak{M}_c} [h(x)]^2 dx \tag{6}$$

és

$$\left[\int_a^b [g_i(x)-g_i(c,\ -c\ ;\ x)]\, h(x)\, dx\right]^2 \leqq 4G^2 \int_{\mathfrak{M}_{c,\,i}} [h(x)]^2 dx. \tag{7}$$

Jelentsen $\varepsilon$ tetszésszerint kicsiny pozitiv számot. Határolt $h(x)$ függvény esetén triviálisan kéznélfekvő, ellenkező esetben pedig az integrál fenti értelmezéséből könnyen következik, hogy ha csak $c$-t elegendő nagynak választjuk, úgy minden olyan halmazon, melynek mértéke $\leqq \frac{G}{c^2}$, a $[h(x)]^2$ függvény integrálja $<\varepsilon$. Jelentsen $c$ ilyen elegendő nagy, meghatározott értéket. Az (5) alatti határegyenlőség folytán akkor megadható olyan $k$ szám, hogy minden $i>k$-ra

$$\left[\int_a^b [g(c,\ -c\ ;\ x)-g_i(c,\ -c\ ;\ x)]\, h(x)\, dx\right]^2 < \varepsilon. \tag{8}$$

(6), (7) és (8)-ból a (2) alatti egyenlőtlenség alapján, mivel még

$$\int_{\mathfrak{M}_c} [h(x)]^2 dx < \varepsilon, \quad \int_{\mathfrak{M}_{c,\,i}} [h(x)]^2 dx < \varepsilon,$$

az

$$\left[\int_a^b [g(x)-g_i(x)]\, h(x)\, dx\right]^2 < (1+4G)^2\varepsilon$$

minden $i>k$-ra érvényes egyenlőtlenség és ezzel a (4) alatti határegyenlőség is következik.[1]

---

[1] A (4) alatti határegyenlőség különben VITALI egy tételének alapján, mely konvergens sorok tagonkint való integrálhatóságának föltételét szabja meg, szintén könnyen igazolható. VITALI tétele szerint a konvergens sor akkor és csak akkor integrálható tagonkint minden részhalmazon, ha minden pozitiv $\varepsilon$ számhoz megadható olyan pozitiv $\delta$, hogy ha csak az $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$ közök hosszainak összege $<\delta$, úgy bármely részletösszegnek e közökön vett integráljainak összege abszolut értékre $<\varepsilon$.

VITALI tételét csak határolt függvényekre fogalmazza meg és bizonyítja be; ez a megszorítás azonban épen nem lényeges és a bizonyításból könnyen kiküszöbölhető.

Annak a ténynek a bebizonyítására, hogy a $g(x)$ határfüggvény az $[L^2]$ osztályba tartozik, VITALI kritériuma természetesen *nem alkalmazható.*

G. VITALI: *Sull' integrazione per serie*, Palermo, Rendiconti, t. 23. (1907), pp. 137—155.

Áll tehát a következő tétel:

*Ha a négyzetükkel együtt integrálható $g_i(x)$ függvények általában a $g(x)$ függvényhez konvergálnak és ha van olyan $G$ szám, hogy valamennyi $g_i(x)$ függvényre*

$$\int_a^b [g_i(x)]^2 dx \leqq G^2,$$

*akkor a $g(x)$ függvény is négyzetével együtt integrálható, négyzetintegrálja szintén $\leqq G^2$ és minden az $[L^2]$ osztályba tartozó $h(x)$ függvényre*

$$\int_a^b g(x)\, h(x)\, dx = \lim_{i=\infty} \int_a^b g_i(x)\, h(x)\, dx.$$

Konvergenczia-kritériumunknak egy másik alkalmazása, melyet a legközelebbi fejezetben használunk föl, a következő:

Legyen $f(x)$ az $(a, b)$ számközön értelmezett, négyzetével együtt integrálható függvény. Oszszuk az $(a, b)$ közt $m_n$ tetszésszerinti részre; jelöljük az osztópontokat rendre $x_0 = a$, $x_1$, $x_2, \ldots, x_{m_n-1}$, $x_{m_n} = b$-vel. Értelmezzük a $\varphi_n(x)$ függvényt a következő előírással

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(y)\, dy.$$

$$(x_k \leqq x < x_{k+1})$$

Akkor

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx - \int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x) - \varphi_n(x)]^2 dx \geqq 0;$$

tehát

$$\int_a^a [\varphi_n(x)]^2 dx \leqq \int_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{9}$$

Legyen $\{\varphi_n(x)\}$ az így értelmezett függvények végtelen sorozata; az értelmezésükre fölhasznált beosztásokról csak azt teszszük föl, hogy növekvő $n$-nel az összes közök tetszésszerint kicsinyek lesznek. Akkor

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x)$$

legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével, t. i. okvetlenül minden olyan helyen, melyen $f(x)$ integrálfüggvényének differencziálhányadosa.

*Azt állítom, hogy*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f(x)-\varphi_n(x)]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \lim_{n=\infty} \int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx = 0.$$

Ugyanis (9)-ből azt látjuk, hogy a $\varphi_n(x)$ függvények négyzetintegráljai véges felső határ alatt feküsznek. Ennélfogva, ha állításunk helytelen, akkor az

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx$$

értékeknek van olyan sűrűsödési értékük: $I$, mely kisebb mint

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Vagyis a $\{\varphi_n(x)\}$ sorozatban foglaltatik olyan $\{\varphi_n^*(x)\}$ sorozat, melyre

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [\varphi_n^*(x)]^2 dx = I < \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

De a $\varphi_n^*(x)$ sorozat is általában $f(x)$ felé tart és így kritériumunk alapján az következnék, hogy

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leqq I < \int_a^b [f(x)]^2 dx;$$

vagyis föltevésünk ellenmondásra vezet.

Az imént bebizonyított tételnek, mely egyébként a LEBESGUE-féle integrálfogalomnak egy HELLINGER által alkalmazott érdekes integrálfogalommal[1] való kapcsolatát állapítja meg, fontos korolláriuma a következő, az integrálfogalom értelmezése és a mérhető halmazok sajátságai alapján közvetlenül is könnyen bizonyítható tétel:

---

[1] E. HELLINGER: *Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variablen*, Dissertation, Göttingen 1907.

*Ha $f(x)$ az $[L^2]$ függvényosztály tetszésszerinti függvénye, $\delta$ pedig valamely tetszésszerint kicsiny pozitiv szám, akkor van olyan $\varphi(x)$ függvény, mely csupán az $(a, b)$ köz végesszámú részközén vesz föl közönkint különböző értékeket és a melyre*

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2 dx < \delta.$$

### 3. Annak az eldöntése, vajjon egy megadott függvény határozatlan integrálja-e az $[L^2]$ osztály valamely függvényének?

Tudjuk, hogy annak a megitélésére, vajjon egy megadott függvény határozatlan integrál-e, LEBESGUE vizsgálatai alapvetők. Ránk nézve döntő fontosságú a következő kérdés, mely az előző fejezet végső eredményeihez csatlakozik: Miképen ismerhetjük föl, vajjon egy megadott $F(x)$ függvény határozatlan integrálja-e egy az $[L^2]$ osztályba tartozó függvénynek; más szóval, hogy létezik-e olyan az $[L^2]$ osztályba tartozó $f(x)$ függvény, hogy minden $\xi$-re $[a \leqq \xi \leqq b]$

$$\int_a^\xi f(x)\, dx = F(\xi)-F(a).$$

Ha van ilyen $f(x)$ függvény és $\varphi_n(x)$ az előző fejezetben értelmezett, az $f(x)$ függvényhez tartozó, az $(a, b)$ köz bizonyos fölosztásának megfelelő függvény, akkor (9) szerint

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} \frac{[F(x_{k+1})-F(x_k)]^2}{x_{k+1}-x_k} = \int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx \leqq \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Hogy tehát az $f(x)$ függvény létezzék, ahhoz mindenesetre szükséges, hogy a

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{[F(x_{k+1})-F(x_k)]^2}{x_{k+1}-x_k} \tag{10}$$

összeg egy a részközök számától és általában a fölosztás módjától független határ alatt feküdjék.

Megmutatjuk, hogy *ez a szükséges föltétel egyszersmind elegendő is.*

Jelentse $G^2$ a felső határt, melynek létezését felteszszük. A (10) alatti összeg minden tagja pozitiv, tehát minden egyes tag $< G^2$. Vagyis

$$[F(x)-F(x')]^2 < G^2 \, |x-x'|.$$

Az $F(x)$ függvény e szerint *folytonos.*

Másrészt a CAUCHY-féle egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\Big[\sum_{k=0}^{m-1} |F(x_{k+1})-F(x_k)|\Big]^2 \leqq G^2 \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1}-x_k) = G^2(b-a).$$

Vagyis az $F(x)$ függvény *határolt ingadozású.*

A folytonos, határolt ingadozású $F(x)$ függvény LEBESGUE egy tétele szerint általában (legfeljebb egy 0-mértékű halmazt alkotó helyek kivételével) differencziálható.[1] Megmutatjuk, hogy az

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

differencziálhányados az $[L^2]$ osztályba tartozik és hogy $F(x)$ az $f(x)$-nek határozatlan integrálja.

A

$$\varphi_n(x) = \frac{F(x_{n,k+1})-F(x_{n,k})}{x_{n,k+1}-x_{n,k}}$$
$$(x_{n,k} \leqq x < x_{n,k+1})$$

függvények sorozata, ha az $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$ közök hossza növekvő $n$-nel 0-hoz tart, általában az $f(x)$ függvényhez konvergál. Minthogy a föltétel szerint minden $n$-re

$$\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx \leqq G^2,$$

---

[1] H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration* etc. p. 128. Elegendő különben a kevésbbé mélyen fekvő tétel is, mely szerint az $F(x)$ függvénynek 4 deriváltja általában (vagyis legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével) létezik.

azért az előző fejezetben bebizonyított tétel alapján $f(x)$ tényleg az $[L^2]$ osztályba tartozik és $\big(h(y)=1$, ha $a \leqq y \leqq x$; $h(y)=0$, ha $y > x\big)$

$$\int_a^x f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^x \varphi_n(x)\,dx = F(x)-F(a).$$

Eredményünket a következő tételben fogalmazhatjuk meg:

*Az $F(x)$ függvény akkor és csak akkor határozatlan integrálja valamely az $[L^2]$ osztályba tartozó függvénynek, ha a*

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{[F(x_{k+1})-F(x_k)]^2}{x_{k+1}-x_k}$$

*összegek egy a részközök számától és a beosztás módjától független határ alatt fekünek.*

## 4. A lineáris függvényoperáczió; előállítása szorzatintegrállal.

Az $A[f(x)]$ függvényoperáczióról, mely az $[L]^2$ osztály minden függvényéhez egy-egy számot rendel, fölteszszük, hogy *disztributiv* és hogy *határolt*. Disztributiv az operáczió, ha azonosan

$$A[c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)] = c_1 A[f_1(x)] + c_2 A[f_2(x)].$$

Határolt az operáczió, ha létezik olyan $M_A$ szám, hogy minden olyan $f(x)$ függvényre, melyre

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx \leqq 1,$$

egyszersmind

$$|A[f(x)]| \leqq M_A.$$

A disztributiv és határolt függvényoperácziót lineárisnak mondjuk.[1]

[1] Könnyű megmutatni, hogy a lineáris operáczió értelmezésénél az a föltevés, hogy az operáczió határolt, ha már előzőleg a disztributivitást

Bebizonyítjuk a következő tételt:

*Minden $A[f(x)]$ lineáris függvényoperáczióhoz létezik olyan az $[L^2]$ osztályba tartozó $a(x)$ függvény, hogy az $[L^2]$ osztály minden $f(x)$ függvényére*

$$A[f(x)] = \int_a^b a(x) f(x)\, dx.^1$$

Hogy a tételt bebizonyíthassuk, értelmezzük az $A(x)$ függvényt a következő előírással:

Jelentse $f(x;\xi)$ azt a függvényt, melynek értéke $x \leqq \xi$ esetén 1, $x > \xi$ esetében pedig 0. Legyen

$$A(\xi) = A[f(x;\xi)].$$

Azt állítjuk, hogy *az így értelmezett $A(x)$ függvény egy az $[L^2]$ osztályba tartozó $a(x)$ függvénynek a határozatlan integrálja.* Az előző fejezetben nyert tétel alapján állításunk helyes, ha létezik olyan $G^2$ szám, hogy bárhogy is osztjuk föl az $(a, b)$ közt végesszámú $(x_k, x_{k+1})$ $(k=0, 1, \ldots, m-1$, $x_0=a$, $x_m=b)$ részközre,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{[A(x_{k+1})-A(x_k)]^2}{x_{k+1}-x_k} \leqq G^2.$$

Megmutatjuk, hogy ilyen $G^2$ szám létezik.

Értelmezzük az $f(x)$ függvényt a következő előírással:

---

föltételeztük, egyértékű a következő föltevéssel: Minden olyan $\{f_i(x)\}$ függvénysorozatra, melyre

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b [f_i(x)]^2 dx = 0,$$

egyszersmind

$$\lim_{i=\infty} A[f_i(x)] = 0.$$

[1] F. Riesz: *Sur une espèce de géométrie analytique des fonctions sommables,* l. cit. A C. R. ugyanazon füzetében a már idézett czikkben közölte Fréchet is a fönti tételt, mint a Fourier-sorokra adott tételemnek egy alkalmazását.

$$f(x) = \frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{(x_{k+1} - x_k)\left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{[A(x_{j+1}) - A(x_j)]^2}{x_{j+1} - x_j}\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

$$(x_k \leqq x < x_{k+1})$$

Az $f(x)$ függvény négyzetintegrálja 1 és ennélfogva

$$|A[f(x)]| \leqq M_A,$$

Másrészt

$$A[f(x)] = \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{[A(x_{k+1}) - A(x_k)]^2}{x_{k+1} - x_k}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Tehát tényleg

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{[A(x_{k+1}) - A(x_k)]^2}{x_{k+1} - x_k} \leqq M_A^2.$$

E szerint létezik olyan az $[L^2]$ függvényosztályba tartozó és egy tetszésszerinti additiv nullfüggvénytől[1] eltekintve, teljesen meghatározott $a(x)$ függvény, melynek az $A(x)$ függvény határozatlan integrálja. Az $a(x)$ függvény négyzetintegrálja $\leqq M_A^2$.

Az ilyen módon értelmezett $a(x)$ függvényről megmutatjuk, hogy minden az $[L^2]$ osztályba tartozó $f(x)$ függvényre

$$A[f(x)] = \int_a^b a(x) f(x)\, dx,$$

vagy más szóval, hogy az

$$A^{\star}[f(x)] = A[f(x)] - \int_a^b a(x) f(x)\, dx$$

lineáris függvényoperáczió azonosan 0.

Az $a(x)$ függvény értelmezéséből világos, hogy

$$A^{\star}[\varphi(x)] = 0$$

minden olyan $\varphi(x)$ függvényre, mely csak végesszámú közön vesz föl közönkint különböző értékeket. Egy előző tételünk

[1] Nullfüggvény alatt olyan függvényt értünk, melynek értéke — legfeljebb egy 0-mértékü halmaz kivételével — állandóan 0.

szerint az $[L^2]$ függvényosztály bármely $f(x)$ függvényéhez és bármely $\varepsilon^2$ számhoz létezik olyan az imént részletezett tulajdonsággal biró $\varphi(x)$ függvény, hogy

$$\int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2 dx < \varepsilon^2,$$

hogy tehát

$$|A^\star[f(x)]| = |A^\star[f(x)-\varphi(x)]| \leqq \varepsilon M_{A^\star}.$$

Ennélfogva pontosan

$$A^\star[f(x)] = 0.$$

*Riesz Frigyes.*

# EVARISTE GALOIS EMLÉKÜNNEPE.

A nemzetközi orvosi kongresszus alkalmából számos egyéb külföldi orvosi testülettel a bécsi női orvosok egyesülete is hatalmas koszorút helyeztetett SEMMELWEISS szobrára és szószólója SCHAUTA bécsi egyetemi orvostanár hangulatos beszédben kifejezést adott annak, hogy a bécsi orvosi fakultás mennyire megbánta és fájdítja, miként világhírű tudósunk nagy eszméit keletkezésük idején a helyett, hogy felkarolta volna, gúnynyal jutalmazta, az ő bécsi tartózkodását elkeserítette és szellemi nagyságunkat, a mennyire csak lehetett, lekicsinyelte, úgy hogy hazájába visszavonulva, feledetten, nyomoruságosan fejezte be áldásos életét.

Habent sua fata — reformatores!

Ez a hír, mely hazai lapjainkat annak idején bejárta, eszmetársulás folytán eszembe juttatja azon másik «engesztelő áldozatot», melynek 1909. év junius 13-án magam is örömest tanuja voltam, midőn TANNERY (JULES), a franczia tudományos akadémia tagja, a Sorbonne mathematikai tanára és az Ecole Normale Supérieure tanulmányi igazgatója fennkölt beszéddel járult a GALOIS szülőházán elhelyezett emléktábla leleplezési ünnepélyéhez.

Páris közelében Bourg-la-Reine városka elhatározta, még pedig MATRUCHOT egyetemi tanárnak, a községtanács egyik tagjának kezdeményezésére, hogy azon házat, melyben a lángelméjű GALOIS született, emléktáblával jelöli meg. A város polgármestere, CANDELOT nyugalmazott tüzérezredes megkérte TANNERY tanárt, hogy a leleplezési ünnepélyen, melyen de SEL-

VES, Szajna megye prefektusa elnökölt és a franczia tudományos akadémia képviseletében DARBOUX főtitkár is megjelent, tartson emlékbeszédet.

TANNERY az általa képviselt előkelő testület nevében ékesszóló bűnbánással felelt meg a megtisztelő felszólításnak. Magyar kartársaink érdeklődésének vélek megfelelni, midőn a gyönyörű beszédet fordításban itt közlöm:

«Valahányszor oly tudós dicsőitéséről van szó, kinek lángelméje nem mindenkitől átérezhető jótéteményekben nyilatkozott meg, az emlékezetének megadott tisztelet csaknem vallásos hódolat jelentőségére emelkedik, mert olyan, mint valamely ideális tudomány iránti áhitatos hitünk, a melynek hódolunk, a nélkül, hogy közelebbről ismernők.

GALOIS EVARISTE rövid, de mozgalmas életének néhány hetét a legelvontabb tudomány legabstraktabb feladatainak szentelte. Csodás felfedezései a gyakorlati alkalmazásoktól oly távol állnak, a mennyire csak lehet. Azoknak dicsőitésével nem a gyakorlatiasságot, hanem a tiszta tudomány egységét és a tudós teljes szabadságát proklamáljuk.

Mi a tudomány czélja? Ismerni a világot, a melyben élünk. De csak úgy ismerjük igazán a természet törvényeit, ha azon numerikus törvényeket is magunkévá tettük, melyeknek azok engedelmeskednek. Ezen törvényeknek hasznunkra forditása, egymásból következtetése, általánositása vagy egyszerüsitése megkivánja, hogy ismerjük a számok tulajdonságait. Egy egészen új világ tanulmányozása ez, egy elvont, szintelen, sötét világé. A kik oda be tudnak hatolni és azt meg tudják világítani, sőt benne el is tudnak igazodni, szenvedélyesen követik a távoli perspektivákat, melyeket ott felfedeznek. A csodás és áttekinthető tájak emléke, melyeket számunkra leirnak, néha a fizikus elméjében visszhangot keltenek és világossá teszik előtte a reális világot, melyhez annyira ragaszkodik. Váratlan eszmetársulás révén a fizikus így végre összekapcsolhat tényeket, melyeket különválva észlelt, azokat igazi helyükre helyezheti és elméletet alkothat, mely azokat átöleli, sőt messze túlhaladja. Már pedig a fizikai elméletek uralják ma a chemiát, az élettant és az orvosi tudományokat. Az összes tudományok egymásba kapcsolódnak, egy nedüből táplálkoznak és abból élnek. Egy-egy elvont mathematikai igazság valamely napon, nem is tudni hogyan, hozzájárul a világ feletti uralomhoz, melyet habár lassú lépésben, a tudományoknak köszönünk.

Érezzük a tudománynak ezt az egységét; tudjuk, hogy az igazságot önmagáért kell kutatni és csak ha már egyszer felfedeztük, jelentkeznek azon alkalmazások, melyeket az ő segítségével létesithetünk. Megértjük tehát, hogy a tudós számára okvetetlenül meg kell őrizni a gondolat teljes szabadságát, úgy a kutatás szabadságát, midőn keresi, a mit találni remél, mint azon utakét is, melyeken halad és azon titokzatos czélét is, melyet ő lát egyedül és a mely őt vonzza magához, míg nekünk megadottan kell eltűrnünk, hogy azt még csak sejteni sem tudjuk.

Ez az oka, miért tiszteljük Galois emlékét és tisztelnők még akkor is, ha a tudomány létjogosultságának mértékéül annak gyakorlati hasznát vennők.

Itt született Galois e házban ime közel egy évszázad előtt. Atyja Gábor, az Ön egyik elődje volt, polgármester úr! Nehéz időkben adta példáját a szabadelvű eszmékhez való hűségnek. A cselszövények és rágalmazások áldozata gyanánt halt meg. Anyja, született Demante, igen okos és igen jó lélek, egy a jogi karon jól ismert nevű családból származott. 1872-ben hunyt el 84 éves korában. Galois Evariste itt nőtt fel, itt játszott, mint kisded, itt élte boldog gyermekéveit. Talán egyedül itten élvezett örömet és árasztott örömet maga körül.

Csakhamar nagy változás következik be. A Louis-le-Grand-lyceumban szomorú, nehézkes és különcz modorú lesz. Lángelméje megragadja. Két szenvedélye között oszlik meg lelke: Első helyen áll a mathematika. «*Szórakozás*»-képen eleitől végig olvassa Legendre geometriáját. Könyv nélkül tudja, mihelyt elolvasta. Az algebra még inkább vonzza, de az elemi kézikönyvektől irtózik és így az algebrát Lagrange műveiből tanulja. Tizenhat éves korában már megérett a felfedező szerepére.

Második kimondhatlan szenvedélye a köztársaság eszméje. Azt imádja titokzatosan, szenvedélyesen. Egy még a mathematikánál is ideálisabb köztársaságé, mely a valóságtól talán még távolabb áll, de a melyért magát feláldozni ábrándja, sőt ha szükséges, kész érte másokat is feláldozni. Olyan ő ebben, mint VICTOR HUGO kreaturái. MARIUS és ENJOLRAS, ime GALOIS fivérei!

Mihelyt a rhetorikát és egyidejűleg a mathematikai előkészítő osztályt elvégezte, az Ecole Polytechnique felvételi vizsgájára jelentkezik, a melyre, úgy hitte, egyedül is el tud készülni. De ott megbuktatták. Ime első csalódása! Csalódásokban egyáltalán nem lesz hiánya. Belép a speczialis mathematikai osztályba. Ott kiváló mestere akad, RICHARD tanár, az egyedüli, a ki őt teljesen megérti és annak ismeri fel, a mi. Ekkor 17 éves. Ezen időszakra esik első mathematikai nyilvános szereplése. Ugyanis dolgozatot nyujt be a Tudományos Akadémiához az algebrai egyenletek elméletéről. Szerencsétlenségére CAUCHYnál elvetődött a dolgozat. A tanév végén ismét jelentkezik az Ecole Polytechnique felvételi vizsgájára, de ismét visszavetik. Ezen második kudarczot nem tudja megbocsátani a vizsgáló tanároknak soha! Nem csupán önérzetét vagy inkább önértékének teljes tudatát sértette meg e bukás, hanem főleg az igen fájt GALOISnak, hogy nem léphetett be azon hírneves házba, melyet tudományos dicsősége és növendékeinek ismert szabadelvű szelleme miatt nagyrabecsült.

Kétségbeesésében az Ecole Normale felé fordul. Oda sikerül bejutnia 1829 október havában. Három dolgozatot közöl 1830 elején. Akkor jut legfontosabb felfedezései nagy részének birtokába. Januárban benyujtja a Tudományos Akadémiához az algebrára vonatkozó kutatásainak összeállítását. FOURIER, az akkori főtitkár elviszi magával a kéziratot. Még ugyanazon évben meghal és annak folytán ezen kéziratot sem lehet többé megtalálni.

Egy évvel később Galois elküldte az Akadémiához dolgozatát azon feltételekről, melyek mellett az egyenletek gyökjelek segitségével megoldhatók. A dolgozat megvizsgálására kijelölt mathematikusok nem vették maguknak a fáradságot, melyet Galois túltömör stylusa igényelt. Ezen dolgozatát, mely dicsőségének egyik legfőbb jogczíme, nem tudták megérteni és így «érthetetlen»-nek nyilvánították. Attól kezdve Galois egyugyanazon gyűlöletbe és egyugyanazon megvetésbe foglalta a Tudományos Akadémia tagjait és az Ecole Polytechnique vizsgáló tanárait.

Térjünk vissza az 1830-iki évhez és azon Ecole Normalehoz, melynek falai között Galois még mindig keservett a felett, hogy az Ecole Polytechnique-be nem sikerült bejutnia. Az iskola igazgatója a juliusi forradalom három napja alatt nagynehezen zár alatt tudta tartani növendékeit, még 29-én is, csütörtöki napon, mely pedig rendszerint kimenő nap volt. Meg lehetünk győződve arról, hogy a szülők ezért őszinte hálával voltak irányában. De képzelhető Galois dühöngése, mikor megtudta, milyen nagy szerepet játszottak a forradalomban az Ecole Polytechnique növendékei és egyéb diákok, mialatt ő és társai be voltak csukva. Az Ecole Normale igazgatója ettől fogva egy rangra sülyedt a Tudományos Akadémia tagjaival és az Ecole Polytechnique examinatoraival!

Deczember havában Galois egy lapban levelet tett közzé, melyben az az úr nem nagy kiméletnek volt tárgya. A levél «Az Ecole Normale egyik növendéke» aláírással jelent meg. Nem volt nehéz a szerző kilétét kipuhatolni, a kit azután egyszerűen kicsaptak.

Galois ekkor a politikai küzdelmek kellő közepébe veti magát, a minek egyedüli gyakorlati eredménye az lett, hogy pörbe fogták és bebörtönözték 1831 május havában a «bourgogne-i szüret»-hez («Aux Vendanges de Bourgogne») czímzett vendéglőben lefolyt bankett után, mivel ott egy pohárköszöntőt mondott, melynek királygyilkos tendencziái tagadhatatlanok. Mivel azonban még nem volt 19 éves, az esküdtszék felmentette daczára annak, hogy szemtelen modorban válaszolgatott az elnök kérdéseire.

Ugyanez év julius 14-én egy köztársasági tüntetés élén áll a nemzeti testőrség tüzéri egyenruhájában, karabélylyal, pisztolylyal és tőrrel felfegyverkezve. Elfogják a Pont-Neuf-hidon, elitélik hat hónapi fogházbüntetésre és deczember 17-én becsukják a Sainte-Pélagie fogházba egy csomó politikai fogoly közé, kiket a fővárost egy év óta duló lázadások folyamán szedtek össze. Ezen magukat «patrioták»-nak nevező egyének fölött furán csodálkozhatnak a mai forradalmárok! Dupuy leírása szerint ime milyen jelenet játszódott le esténkint lefekvés előtt ezen környezetben;

«A foglyok összegyűlnek és kórusban énekelnek hazafias dalokat, végül a Marseillaise-t. Azon strófánál: «Amour sacré de la Patrie» mindnyájan letérdepelnek, mialatt a rácsos ablakokból a rácsokba kapaszkodó fiatal foglyok, a politikai foglyok közé beosztott csavargó, elhagyott gyermekek elkezdték énekelni a gyermekek strófáját. Úgy hangzott az, mintha felülről az égből hullt volna. Midőn csengő hangjuk elhallgatott, a férfiak elvonultak a zászló előtt és annak szegélyét megcsókolták, azután aludni tértek.»

Daczára az őket mozgató nagy érzelmeknek, e foglyok igen vegyes társaságot képeztek és abban a durva erkölcsök nem igen hiányoztak.

Önök közül, uraim, többen láthatták azon kedves arczképet, melyet Galois unokahugának, Guinard asszonynak szivessége folytán sokszorosíttatni lehetett. Milyen finom és előkelő vonásai, mély szép szemei, hatalmas homloka, mélabús fitymáló szája voltak e gyermekarcznak! Már most képzeljük el őt fel-alá sétálva a barrikádok vén törzsvendégei között. Agyában a legmagasabb mathematikai kérdések mozognak, a logikai következmények csodálatraméltó lánczolata húzódik el lelki szemei előtt vagy pedig annak módja felett gondolkodik, hogyan fedezhetünk fel új igazságokat, melyek újabb fényt árasztanak már meglevő régi igazságokra, a honnan ők maguk is előkerültek.

Avagy talán egy új jobb társadalom nagyszerű tervét szövi, melyben örökös igazság fog uralkodni. Fogolytársai csodálkoznak rajta, szólítgatják, gúnyolódnak, mert nincs bátorsága az iváshoz: ime egy szép napon ezt meghazudtolandó kiürít egy hajtásra egy üveg pálinkát! Raspail híres leveleiben a párisi börtönökről leírta e szörnyű jelenetet és egyebeket is, melyek GALOIS egészségét aláásták. Pedig egyébként sok jóakarattal voltak irányában. Márczius 16-án szanatoriumba küldték és csupán becsületszavát vették, hogy nem szökik meg. Ott szerelemre gyullad egy nő iránt, kit ő maga is nemsokára infámis kaczérnak mond, de a kinek azért hetekig teljesen rabszolgájává lesz. Eme szenvedélyéről ime, mily meghatóan nyilatkozik önmaga:

«Hogyan vigasztalódhatnám én, midőn egy rövid hónap alatt kimerítettem a boldogságnak ama forrásai közül, melyek fölött ember rendelkezik, a legeslegszebbíket, midőn kimerítettem boldogság nélkül, remény nélkül és azon biztos tudatban, hogy azt az egész életre elapasztottam.

Ez «infâme coquette» miatt, nem tudni miért, azt sem, ki ellen, párbajra kel május 30-án, halálosan megsebesül és meghal 1832 május 31-én reggel 10 órakor.

Úgy látszik, mindent elkövetett, hogy e buta párbajt elkerülje. Midőn elfogadta, már biztos volt abban, hogy megölik. A párbajt megelőző egész napot és egész éjjelt azzal tölti, hogy még egyszer átnézze nagy dolgozatát az egyenletek megoldhatóságáról és hogy megírja tudományos végrendeletét, azt a rendkívüli levelet AUGUSTE CHEVALIERhoz, a melyben egész tudománya megjelenik és a hol egész lángesze kibontakozik. Milyen tragikus éjjel ez, uraim, mikor e lángeszű gyermek annak tudatában, hogy a világosság, melynek hordozója, perczek mulva ki fog aludni, maga előtt látja elvonulni mindazt, a mit teremtett és mindazt, a mit még tudott volna teremteni. Azon törekvése közben, hogy legalább a leglényegesebb eredményeket megállapíthassa és megmenthesse, lázas kézzel írja a levélben: «Je n'ai pas le temps». («Már nincs időm reá.»)

Tizenöt évvel később, 1846-ban Liouville (Joseph) közzétette szaklapjában «*Galois mathematikai műveit*». Ezen közzététel ép oly értelmesen, mint lelkiismeretesen végeztetett. Liouville mindazt közölte, a mi közölni való volt. Iratai tanuskodnak azon rengeteg munkáról, melyet végeznie kellett, hogy Galois gondolataiba behatoljon. Ezen munkákat 1897-ben újra kinyomatta a Mathematikai Társaság Picard Emil tanárnak egy igen szép előszavával. Három évvel ezelőtt Madame de Blignières, Liouvillenek egyik leánya, megtalálta atyja iratai között Galois kéziratait és odaajándékozta azokat a Tudományos Akadémiának.

Az Akadémia megbecsülhetetlen ereklyék gyanánt kegyelettel fogadta ezen sárgult, szakadt, bepiszkolódott lapokat tele firkantásokkal, be nem végzett számításokat, a Sainte-Pélagie fogházból eredő töredékeket, melyekből a gyűlölet és a láz kiérzik, a gyászos éjjel írt levelet, a dicsőségteljes dolgozatot, melyet valaha «megérthetetlen»-nek itéltek, az Akadémia tagjaihoz nyolczvan év előtt intézett sértéseket.

És ma, uraim, az Akadémia főtitkára itt van közöttünk és hozzánk csatlakozik Galois dicsőitésében.

Liouville közzététele óta évről-évre világosabban jelentkezett Galois műveinek fontossága. A legnagyobb mathematikusok is szivesen hirdették azt. Nem itt a helye annak kimutatása és nem én vagyok arra hivatva, hogy mily nagy befolyással voltak azok a mathematika haladására.

1894-ben ünnepelte az Ecole Normale száz éves fennállását. Az ez alkalomból kiadott ünnepi emlékkönyvbe egy külföldi hires tudós, Sophus Lie tanulmányt írt Galoisról, mely egyike a Galois dicsőségének emelt emlékek legszebbikének. Ugyanazon alkalommal Paul Dupuy, az Ecole Normale mai titkára, hosszú és lelkiismeretes kutatásokat kezdett Galois életére vonatkozólag. Lapozgatta az akkori lapokat és átkutatta a fogházak lajstromait. Galois még élő rokonai és barátai minden tekintetben segitségére voltak. Ezen kutatások eredményei egy véglegesnek tekinthető életrajzhoz vezettek. Dupuy abban annyira törekszik megértetni Galois jellemét, hogy csaknem sikerül neki őt megszerettetni.

Az Ecole Normale-nál elfoglalt állásomnak köszönhetem, hogy ma itt szóhoz jutottam. Köszönöm, polgármester úr, hogy lehetővé tette, miként Galois lángeszétől ünnepélyesen bocsánatot kérjek ezen iskola nevében, melybe csak sajnálatára lépett be, a hol nem értették meg, a mely ellökte magától és a melynek mindannak daczára egyik legfényesebb dicsősége.»

*Korda Dezső.*

# AZ ELEKTRODINAMIKA ALAPEGYENLETEINEK MEGOLDÁSI MÓDSZEREIRŐL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

## IV. Nem független áramkörrendszerek.

Nem független áramkörrendszernek nevezzük az áramköröknek olyan rendszerét, melyben egymással vezetői összeköttetésben álló áramkörök is fordulnak elő.

*a) Nem független áramkörrendszer egy kondenzátorral.*

Álljon rendszerünk: 1. egy $n$ vezetővel párhuzamosan összekapcsolt kondenzátorból; 2. $m$ egymástól független áramkörből. Ha az $r$-edik áramkörben az elektromotoros erő $E_r$, az áramintezitás $J_r$, a vezető ellenállása $W_r$, autoindukcziós együtthatója $L_{rr}$, az $s$-dik vezetőre vonatkozó kölcsönös indukcziós együtthatója $L_{rs}$; a kondenzátor kapaczitása $C$, potencziális differencziája $V$, akkor a rendszerünkben fellépő jelenség tanulmányozására a következő egyenletrendszer szolgál:

$$\left.\begin{aligned} W_r J_r + L_{r1}\frac{dJ_1}{dt} + \cdots + L_{rm+n}\frac{dJ_{m+n}}{dt} &= E_r + V; \\ W_s J_s + L_{s1}\frac{dJ_s}{dt} + \cdots + L_{sm+n}\frac{dJ_{m+n}}{dt} &= E_s; \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

$$(r=1, \ldots, n;\quad s=n+1, \ldots, n+m)$$

$$J_1 + \cdots + J_n = -C\frac{dV}{dt},$$

melyet a III. fejezetben (második közlemény) alkalmazott jelölések felhasználásával a következő alakba írhatunk:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+n} M_{rk}(D)\,J_k = E_r + V;\\&\sum_{k=1}^{m+n} M_{sk}(D)\,J_k = E_s;\\&(r=1,\ldots,n;\quad s=n+1,\ldots,m+n)\\&\sum_{k=1}^{n} J_k = -CDV.\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{I}')$$

Ebből pedig könnyen leszármaztatható a következő:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\{CDM_{rk}(D)+1\}\,J_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} CDM_{rk}(D)\,J_k = CE'_r;\\&\sum_{k=1}^{m+n} M_{sk}(D)\,J_k = E_s.\\&(r=1,\ldots,n;\quad s=n+1,\ldots,m+n)\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{I}'')$$

Ha ennek az egyenletrendszernek a determinánsát $B(D)$-vel, $B(D)$ $k$-adik oszlopához tartozó aldeterminánsainak a

$$CE'_1,\ldots .\, CE'_n,\ E_{n+1},\ldots,E_{n+m}$$

elemekkel való kompoziczióját pedig $B_k(D)$-vel jelöljük, akkor

$$B(D)\,J_k = B_k(D). \qquad (1)$$
$$(k=1,\ldots,m+n)$$

$B(D)$ és $B_k(D)$ közös tényezője $D^{n-1}$, azért

$$B(D)\,J_k = 0$$

általános megoldása:

$$J_k = \sum_{r=1}^{n-1} a_{kr} t^{r-1} + \sum_{r=1}^{m+n+1} A_{kr} e^{\nu_r t},$$

hol $\nu_1,\ldots,\nu_{m+n+1}$ a

$$\frac{B(\nu)}{\nu^{n-1}} = 0 \qquad (2)$$

egyenlet gyökei.

Ennélfogva a III. fejezetben kifejtett módszerrel találjuk, hogy az (I″) rendszer általános megoldása

$$J_k = (J_k) + \sum_{r=1}^{n+m+1} A_r B_{1k}(\nu_r)\, e^{\nu_r t}, \qquad (3)$$

hol $(J_k)$ az (1) alatt levő egyenlet egyik partikuláris megoldása; $B_{rk}(\nu)$-k pedig a $B(\nu)$ aldeterminánsait jelölik.

Az (I') rendszer utolsó egyenlete $V$ számára a következő értéket szolgáltatja:

$$V = -\frac{1}{C}\int\left(\sum_{k=1}^{n} J_k\right)dt. \tag{4}$$

Az $m+n+1$ határozatlan konstans $(A_r)$ meghatározása a $V$, $J_1, \ldots, J_{m+n}$ kezdőértékeinek felhasználásával már semmi nehézségbe sem ütközik.

Azonban a (3) és (4) alatt levő egyenletekkel jellemzett jelenség karakterisztikus vonásait csak úgy állapithatjuk meg, ha a (2) alatt levő egyenlet gyökeinek tulajdonságait ismerjük.

A (2) alatt levő egyenlet alapján a

$$\nu^2 C\sum_{k=1}^{n+m} L_{rk}x_k + \nu C W_r x_r + \sum_{k=1}^{n} x_k + 0;$$

$$\nu\sum_{k=1}^{n+m} L_{sk}x_k + W_s x_s = 0;$$

$$(r=1,\ldots,n;\quad s=n+1,\ldots,n+m)$$

egyenletrendszernek a triviális megoldáson kívül van még más megoldása is. Ebből az egyenletrendszerből, ha

$$\frac{1}{\nu} = \alpha+\beta i,\quad x = \xi+\eta i$$

a valós és képzetes részek szétválasztásával a következőt nyerjük:

$$\sum_{k=1}^{m+n} L_{rk}\xi_k + W_r(\alpha\xi_r-\beta\eta_r) + \frac{\alpha^2-\beta^2}{C}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{2\alpha\beta}{C}\sum_{k=1}^{n}\eta_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m+n} L_{sk}\xi_k + W_s(\alpha\xi_s-\beta\eta_s) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m+n} L_{rk}\eta_k + W_r(\alpha\eta_r+\beta\xi_r) + \frac{\alpha^2-\beta^2}{C}\sum_{k=1}^{n}\eta_k + \frac{2\alpha\beta}{C}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m+n} L_{sk}\eta_k + W_s(\alpha\eta_s+\beta\xi_s) = 0.$$

$$(r=1,\ldots,n;\quad s=n+1,\ldots,n+m)$$

Ha ezeket az egyenleteket rendre: $-\eta_r$, $-\eta_s$, $\xi_r$, $\xi_s$-sel megszorozzuk s azután az $r$ és $s$ különböző értékeinek megfelelő egyenleteket mind összeadjuk, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$\beta \sum_{r=1}^{m+n} W_r(\xi_r^2+\eta_r^2) + \frac{2\alpha\beta}{C}\left[(\sum_{k=1}^{n} \xi_k)^2+(\sum_{k=1}^{n} \eta_k)^2\right] = 0.$$

Mivel a $\xi$-k és $\eta$-k nem mindegyike zérus, azért, ha $\beta$ sem zérus, akkor egyenletünk csak úgy állhat meg, ha $\alpha$ negativ. Ha pedig $\beta=0$, akkor egyenletrendszerünk alapján könnyen belátható, hogy

$$\sum_{r,k=1}^{m+n} L_{rk}\xi_r\xi_k + \alpha \sum_{r=1}^{m+n} W_r\xi_r^2 + \frac{\alpha^2}{C}(\sum_{k=1}^{n} \xi_k)^2 = 0.$$

*Ennélfogva a*

$$\frac{B(\nu)}{\nu^{n-1}} = 0$$

*egyenlet valós gyökei negativek, komplex gyökeinek valós része szintén negativ. Tehát a* (3) *és egyenletekkel képviselt jelenségben a staczionér állapotot az*

$$J_k = (J_k) \qquad (k=1,\ldots,m+n)$$

$$V = -\frac{1}{C}\int\left[(\sum_{k=1}^{n}(J_k)\right]dt$$

*egyenletek jellemzik, melynek bekövetkezte előtt a jelenségben még csillapodó áramok is lépnek fel, melyek között lehetnek periodikus áramok is, melyeknek maximalis száma az* $\frac{m+n+1}{2}$*-höz legközelebb álló s ennél nem nagyobb egész szám?*

Azonban az (I′) alatt levő egyenletrendszer megoldására még a következő módszer is alkalmazható:

Ha rendszerünk baloldalának determinánsát $\Delta(D)$-vel jelöljük; $\Delta(D)$ $k$-adik oszlopához tartozó aldeterminánsainak kompoziczióját az $E_1,\ldots,E_n$, $0,\ldots,0$ elemekkel $D_k$-nak nevezzük; s ha azt a determinánst, melyet $\Delta(D)$-ből úgy nyerünk, ha abban a $k$-adik oszlop $n$ első elemét 1-gyel, a többit pedig 0-sal helyettesítjuk, $\Delta_k(D)$-vel jelöljük; akkor

$$\Delta(D) J_k = \Delta_k(D) V + D_k, \tag{II}$$

honnan tekintettel az (I') alatt levő rendszer utolsó egyenletére:

$$CD\Delta(D) V + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(D) V + \sum_{k=1}^{n} D_k = 0. \tag{III}$$

Ha már most ennek az egyenletnek egyik partikuláris megoldását $(V)$-nek, a (2) alatt levő egyenlettel azonos

$$C\nu\Delta(\nu) + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(\nu) = 0 \tag{IV}$$

egyenletnek gyökeit pedig ismét $\nu_1, \ldots . \nu_{n+m+1}$-nek nevezzük, akkor a III. egyenlet általános megoldása:

$$V = (V) + \sum_{r=1}^{n+m+1} A_r e^{\nu_r t}. \tag{5}$$

Ha pedig a (II) egyenletben $V$ helyett $(V)$-t írunk s aztán az így nyert egyenletnek egyik partikuláris megoldását $(J_k)$-val jelöljük, akkor könnyű belátni, hogy a (II) általános megoldása:

$$J_k = (J_k) + \sum_{r=1}^{n+m+1} A_r \frac{\Delta_k(\nu_r)}{\Delta(\nu_r)} e^{\nu_r t}. \tag{6}$$

Abban a különös esetben, ha az elektromotoros erők mindegyike konstans:

$$D_k = W_1 \ldots W_{n+m} \cdot \frac{E_k}{W_k};$$

$$\Delta_k(0) = W_1 \ldots W_{n+m} \cdot \frac{1}{W_k} \cdot \qquad (k \leqq n)$$

$$\Delta_s(0) = 0, \qquad (s > n)$$

$$(V) = -\frac{\sum_{k=1}^{n} D_k}{\sum_{k=1}^{n} \Delta_k(0)} = -\frac{\frac{E_1}{W_1} + \cdots + \frac{E_n}{W_n}}{\frac{1}{W_1} + \cdots + \frac{1}{W_n}}. \tag{7}$$

$$(J_k) = \frac{\Delta_k(0)}{\Delta(0)}(V) + \frac{D_k}{\Delta(0)} = -\frac{1}{W_k}\frac{\frac{E_1}{W_1}+\cdots+\frac{E_n}{W_n}}{\frac{1}{W_1}+\cdots+\frac{1}{W_n}} + \frac{E_k}{W_k}. \quad (8)$$
$$(k=1,\ldots,n)$$

$$(J_s) = \frac{D_s}{\Delta(0)} = \frac{E_s}{W_s}. \quad (9)$$
$$(s=n+1,\ldots,n+m)$$

Fejtegetéseink tárgyát képező probléma egy speczialis esetével, t. i. melyben

$$E_1 = \cdots = E_{m+n} = 0$$

már GARBASSOnál[1] találkozunk, azonban ő néhány speczialis esetre vonatkozó képletgyűjteményen túl nem emelkedik; az egyenletei tartalmazta jelenség általános jellemzésére nem is vállalkozhatott, miután azok matematikailag sem részesültek kellő méltánylásban.

*β) Nem független áramkörrendszer tetszőleges számú kondenzátorral.*

Legyen áramkörrendszerünkben $s$ kondenzátor, ezek $l$-ikéhez párhuzamosan kapcsolt áramkörök száma legyen $n_l$, ennélfogva áramköreink száma

$$n_1 + \cdots + n_s = n.$$

Ha már most $a_l$-lel oly egész számot jelölünk, mely $n_1+\cdots+$ $+n_{l-1}+1$-től $n_1+\cdots+n_l$-ig minden értéket felvehet, tehát a melyre nézve

$$n_1+\cdots+n_{l-1} < a_l \leqq n_1+\cdots+n_l,$$

ha továbbá $l$-edik kondenzátor kapaczitását és potencziálkülönbségét rendre $C_l$-lel és $V_l$-lel jelöljük, a hozzá kapcsolt áramkörökre vonatkozó fizikai mennyiségeket az eddig használt jelölések megtartásával $a_l$ indexekkel látjuk el: akkor a rendszerünkben fellépő jelenség jellemzésére a következő egyenletrendszer szolgál:

[1] GARBASSO: Ann. d. Phys. 1902. 8. Bd. 4. Folg. p. 890.

$$\sum_{k=1}^{n} M_{rk}(D)\, J_k = E_r + V_l;$$
$$(r=1,\ldots,n)$$

$$\sum_{\alpha_l} J_{\alpha_l} = -\, C_l \frac{dV_l}{dt}. \tag{V}$$
$$(l=1,\ldots,s)$$

Egyenletrendszerünk első részében $V$ az $l$ indexet mindaddig megtartja, míg $r$ $\alpha_l$ minden lehetséges értékén át nem fut.

Problémánk egyik speciális esete ($s=2$, $C_2=\infty$) az *a)* alatt tárgyalt problémával egyezik meg.

Ha már most a rövidség kedvéért

$$C_l D M_{rk}(D) = N_{rk}(D),$$
$$C_l D M_{r\alpha_l}(D) + 1 = N_{r\alpha_l}(D),$$

akkor az (V) rendszerből ezen jelölések felhasználásával egész könnyűség származtathatjuk le a következő rendszert:

$$\sum_{k=1}^{n} N_{rk}(D)\, J_k = C_l E_r'. \tag{V'}$$
$$(r=1,\ldots,n)$$

Ennek a rendszernek a megoldási eljárása ismeretes; ezzel nem is foglalkozunk, csak az egyenletrendszerünkkel képviselt jelenség jellemzésére fontos algebrai egyenlet gyökeinek a diszkusszióját mutatom be. Ez az egyenlet a jelen esetben

$$\frac{|N_{rk}(\nu)|}{\nu^{n-s}} = \Delta(\nu) = 0, \tag{10}$$

mely $n+s$-edfokú.

$\nu$ minden oly értéke mellett, mely a (10) egyenletet kielégíti a

$$\nu^2 C_l \sum_{k=1}^{n} L_{rk} x_k + \nu C_l W_r x_r + \sum x_{\alpha_l} = 0$$
$$(r=1,\ldots,n)$$

egyenletrendszernek a triviális megoldáson kívül van még más megoldása is, miből az *a)* fejezet jelöléseinek a megtartásával az ott alkalmazott módszerrel rögtön következik, hogy:

$$\beta \sum_{r=1}^{n} W_r(\xi_r^2+\eta_r^2)+2\alpha\beta\sum_{l=1}^{s}\frac{(\sum \xi_{\alpha_l})^2+(\sum \eta_{\alpha_l})^2}{C_l}=0,$$

ha pedig $\beta=0$, akkor

$$\sum_{r,k=1}^{n} L_{rk}\xi_r\xi_k+\alpha\sum_{r=1}^{n} W_r\xi_r^2+\alpha^2\sum_{l=1}^{s}\frac{(\sum \xi_{\alpha_l})^2}{C_l}=0.$$

*Tehát az a) fejezetben a* (2), *illetőleg* (IV) *egyenlet gyökeire vonatkozólag megállapított tétel a* (10) *egyenletre is átruházható, továbbá az* (V) *alatt levő egyenletrendszerrel jellemzett jelenség stazionér folyamata előtt csillapodó áramokat is tartalmaz, melyek közül némelyek oszczillatorikusak is lehetnek s ezeknek maximalis száma az* $\frac{n+s}{2}$*-hez legközelebb álló s nála nem nagyobb egész szám.*

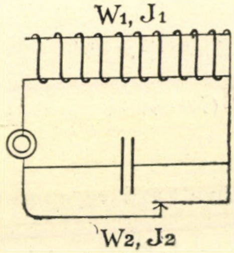
## Alkalmazások.

1. *A kondenzátoros szikrainduktor primér áramkörének elmélete.*

Ha a Rhumkorff-féle szikrainduktort szekundér tekercsétől megfosztjuk, akkor a 6. ábrában vázolt rendszert nyerjük, mely az általános elmélet

$$n=2,\ m=0,\ E_2=0.\ E_1=\text{konst.}$$

esetének felel meg.



6. ábra.

Igen nagy megközelítéssel még

$$L_{22}=L_{12}=0,$$

következőleg a rendszerünkben fellépő jelenséget ezek az egyenletek tartalmazzák:

$$
\begin{aligned}
(W_1+L_{11}D)\,J_1 &= E_1+V,\\
W_2J_2 &= V, \qquad\qquad (11)\\
J_1+J_2 &= -\,CDV.
\end{aligned}
$$

Az általános elmélet értelmében a partikuláris integrálok:

$$
\begin{aligned}
(V) &= -\frac{W_2E_1}{W_1+W_2},\\
(J_1) &= \frac{E_1}{W_1+W_2}, \qquad\qquad (12)\\
(J_2) &= -\frac{E_1}{W_1+W_2}.
\end{aligned}
$$

Mivel a jelen esetben

$$J_2 = \frac{V}{W_2},$$

azért kutatásainkat inkább csak a $V$ és $J_1$ meghatározására fordítjuk. A (11) egyenletekből rögtön belátható, hogy

$$J_1 = -\frac{V}{W_2} - C\frac{dV}{dt}, \qquad (13)$$

$$CW_2L_{11}\frac{d^2V}{dt} + (L_{11}+CW_1W_2)\frac{dV}{dt} + (W_1+W_2)\,V + W_2E_1 = 0.$$

Tehát

$$
\begin{aligned}
V &= -\frac{W_2E_1}{W_1+W_2} + A_1e^{\nu_1 t}+A_2e^{\nu_2 t},\\
J_1 &= \frac{E_1}{W_1+W_2} - \frac{1+CW_2\nu_1}{W_2}A_1e^{\nu_1 t} - \frac{1+CW_2\nu_1}{W_2}A_2e^{\nu_2 t},
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

hol $\nu_1$ és $\nu_2$ gyökei a következő egyenletnek:

$$CW_2L_{11}\nu^2+(L_{11}+CW_1W_2)\nu + W_1+W_2 = 0.$$

Ha az áramkör nyitva van, akkor $W_2=\infty$, tehát a staczionér állapot:

$$(V) = -\,E_1, \quad (J_1) = 0.$$

Ha pedig az áramkör zárva van, akkor $W_2$ igen kicsiny, tehát a staczionér állapot

$$(V) = -\frac{W_2}{W_1} E_1, \quad (J_1) = \frac{E_1}{W_1}.$$

a) *A zárás pillanatában,* tehát $V$ és $J_1$ kezdőértékei

$$(V)_{t=0} = -E_1, \quad (J_1)_{t=0} = 0,$$

s mivel $W_2$ igen kicsinynyé lesz, a $\nu_1$ és $\nu_2$ meghatározására szolgáló egyenlet:

$$CW_2L_{11}\nu^2 + L_{11}\nu + W_1 = 0,$$

honnan megközelítőleg

$$\nu_1 = -\frac{L_{11}}{W_1}, \quad \nu_2 = -\frac{1}{CW_2},$$

tehát

$$V = -\frac{W_2}{W_1} E_1 + A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t},$$

$$J_1 = \frac{E_1}{W_1} - \frac{A_1}{W_2} e^{\nu_1 t},$$

$t=0$ időben:

$$\frac{W_2}{W_1} E_1 - E_1 = A_1 + A_2.$$

$$0 = \frac{E_1}{W_1} - \frac{A_1}{W_2},$$

következőleg igen nagy megközelítéssel:

$$A_1 = \frac{W_2E_1}{W_1}, \quad A_2 = -E_1;$$

$$\left.\begin{aligned} V &= -\frac{W_2E_1}{W_1} + \frac{W_2E_1}{W_1} e^{\nu_1 t} - E_1 e^{\nu_2 t}, \\ J_1 &= \frac{E_1}{W_1} - \frac{E_1}{W_1} e^{\nu_1 t}, \\ J_2 &= -\frac{E_1}{W_1} + \frac{E_1}{W_1} e^{\nu_1 t} - \frac{E_1}{W_2} e^{\nu_2 t}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

A második ágban a zárás után keletkezett hő, ha a $W_2$-vel szorzott tagokat elhanyagoljuk:

$$H=\int_0^\infty J_2 V dt = -\frac{E_1^2 \nu_1}{W_1 \nu_2 (\nu_1+\nu_2)} - \frac{E_1^2}{2W_2 \nu_2},$$

mivel az első tag a második mellett elenyésző csekély, azért

$$H=\frac{CE_1^2}{2},$$

a mi $C$-vel együtt szintén elenyésző csekély. Ennélfogva kimondhatjuk a tételt, mely szerint:

*Áramzáráskor a zárás helyén keletkezett hő igen csekély s C-vel együtt fogy.*

*b)* Nyitás pillanatában $V$ és $J_1$ kezdőértékei

$$(V)_{t=0}=0, \quad (J_1)_{t=0}=\frac{E_1}{W_1}$$

s mivel $W_2$ végtelen nagygyá válik, azért a $\nu_1$ és $\nu_2$ meghatározására szolgáló egyenlet

$$CL_{11}\nu^2 + CW_1\nu + 1 = 0, \tag{16}$$

továbbá

$$\left.\begin{aligned} V &= -E_1 + A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t}, \\ J_1 &= -C\nu_1 A_1 e^{\nu_1 t} - C\nu_2 A_2 e^{\nu_2 t}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

A (16) egyenletből

$$\nu = -\frac{W_1}{2L_{11}} \pm i\sqrt{\frac{1}{CL_{11}} - \frac{W_1^2}{4L_{11}^2}} = a \pm \omega i,$$

$$(\nu_1, \nu_2) = a+\omega i, \ a-\omega i.$$

Az $A_1$ és $A_2$ meghatározására szolgáló egyenletek:

$$E_1 = A_1 + A_2,$$

$$-\frac{E_1}{CW_1} = \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2,$$

honnan

$$A_1 = \frac{E_1}{\nu_2 - \nu_1}\left(\nu_2 + \frac{1}{CW_1}\right),$$

$$A_2 = -\frac{E_1}{\nu_2 - \nu_1}\left(\nu_1 + \frac{1}{CW_1}\right).$$

Következőleg:

$$V = -E_1 + \frac{E_1}{\omega C W_1} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \delta),$$

$$J_1 = -C\frac{dV}{dt}. \tag{18}$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{\omega}{\frac{1}{CW_1} - \frac{W_1}{2L_{11}}}.$$

Mivel $W_2 = \infty$, azért

$$J_2 = \frac{E_1}{\omega C W_1 W_2} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \delta)$$

csak akkor lesz véges, ha $\omega C W_1$ igen kicsiny. Ennélfogva a második áramkörben létrejött hő az alacsonyabbrendű mennyiségek elhanyagolásával megközelítőleg:

$$H = \frac{E_1^2}{\omega^2 C^2 W_1^2 W_2}\int_0^\infty e^{2\alpha t}\sin^2(\omega t + \delta)\,dt = \frac{E_1^2 L_{11}^2}{CW_1^2 W_2}, \tag{19}$$

a mi $C$ minden véges értékénél végtelen kicsiny, tehát: *az áramnyitáskor keletkező csillapodó oszczilláló szikrázás által létrehozott hő igen csekély.*

Ha eredményeinket az első közlemény *a)* fejezetében lehozottakkal összevetjük, kétségtelené válik, hogy a *kondenzátor az áramnyitáskor keletkező szikrázást jelentékenyen csökkenti.*

2. *A kapaczitásos* Rhumkorff-*féle szikrainduktor.* Ha az előbbi feladatban leírt készüléket még egy szekundér tekercscsel szereljük fel, akkor a kapaczitással felszerelt Rhumkorff-féle szikrainduktort nyerjük, mely az általános elmélet

$$n = 2,\ m = 1,\ E_1 = \text{konstans},\ E_2 = E_3 = 0$$

esetének felel meg; az előbbi jelölések megtartásával a szekundér tekercsre vonatkozó fizikai mennyiségeket 3 indexszel jelölve, a rendszerünkben fellépő jelenség tanulmányozására a következő egyenletek szolgálnak:

$$\begin{aligned}(W_1+L_{11}D)J_1+L_{13}DJ_3 &= E_1+V,\\ L_{31}DJ_1+(W_3+L_{33}D)J_3 &= 0;\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}W_2J_2 &= V,\\ J_1+J_2 &= -C\frac{dV}{dt}.\end{aligned} \tag{21}$$

A (20) egyenletekből

$$\begin{aligned}\Delta(D)J_1 &= W_3E_1+(W_3+L_{33}D)V,\\ \Delta(D)J_3 &= -L_{31}DV.\end{aligned} \tag{22}$$

Ezekből pedig a (21) egyenletek másodika alapján, annak megfontolásával, hogy

$$W_2\Delta(D)J_2 = \Delta(D)V$$

nyerjük, hogy

$$CW_2D\Delta(D)V+[W_2W_3+W_2L_{33}D+\Delta(D)]V+W_2W_3E_1=0. \tag{23}$$

A (20) és (21) egyenletek partikuláris megoldásai a (7), (8) és (9) képletek alapján:

$$\begin{aligned}(V) &= -\frac{W_2E_1}{W_1+W_2},\\ (J_1) &= \frac{E_1}{W_1+W_2},\\ (J_2) &= -\frac{E_1}{W_1+W_2},\\ (J_3) &= 0.\end{aligned} \tag{24}$$

*Ha az áramkör nyitva van,* akkor

$$W_2=\infty,\ (V)=-E_1,\ (J_1)=0,\ (J_2)=0,\ (J_3)=0.$$

*Ha az áramkör zárva van,* akkor

$$W_2=0,\ (V)=0,\ (J_1)=\frac{E_1}{W_1},\ (J_2)=-\frac{E_1}{W_1},\ (J_3)=0.$$

Ennélfogva az általános megoldás $J_2$ elhagyásával

$$V = -\frac{W_2 E_1}{W_1 + W_2} + \sum_{r=1}^{3} A_r e^{\nu_r t},$$

$$J_1 = \frac{E_1}{W_1 + W_2} + \sum_{r=1}^{3} \frac{W_3 + L_{33}\nu_r}{\Delta(\nu_r)} A_r e^{\nu_r t}, \tag{25}$$

$$J_3 = -\sum_{r=1}^{3} \frac{L_{13}\nu_r}{\Delta(\nu_r)} A_r e^{\nu_r t},$$

hol

$$\Delta(\nu) = (L_{11}L_{33} - L_{13}^2)\nu^2 + (L_{11}W_3 + L_{33}W_1)\nu + W_1 W_3, \tag{26}$$

a $\nu$-k pedig gyökei a következő egyenletnek:

$$\begin{aligned} & CW_2(L_{11}L_{33} - L_{13}^2)\nu^3 + \\ & + [L_{11}L_{33} - L_{13}^2 + W_2 C(L_{11}W_3 + L_{33}W_1)]\nu^2 + \\ & + [L_{11}W_3 + L_{33}W_1 + L_{33}W_2 + CW_1W_2W_3]\nu + \\ & + (W_1 + W_2)W_3 = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

a) *Záráskor*

$$W_2 = 0, \quad W_3 = \infty,$$

tehát a $\nu$-k meghatározására szolgáló egyenlet

$$\frac{CW_2}{W_3}(L_{11}L_3 - L_{13}^2)\nu^3 + W_2 C L_{11}\nu^2 + L_{11}\nu + W_1 = 0, \tag{28}$$

honnan közelítőleg:

$$\begin{aligned} \nu_3 &= -\frac{L_{11}W_3}{L_{11}L_{33} - L_{13}^2}, \\ \nu_2 &= -\frac{1}{W_2 C}, \\ \nu_1 &= -\frac{W_1}{L_{11}}. \end{aligned} \tag{29}$$

A (23) egyenlet szerint

$$\Delta(\nu) = -\frac{W_2(W_3 + L_{33}\nu)}{1 + W_2 C\nu}, \tag{30}$$

következőleg

$$\begin{aligned} \frac{W_3 + L_{33}\nu_r}{\Delta(\nu_r)} &= -\frac{1}{W_2} \cdot \frac{\nu_2 - \nu_r}{\nu_2}. \\ \frac{-L_{13}\nu_r}{\Delta(\nu_r)} &= \frac{L_{13}}{W_2} \cdot \frac{\nu_r}{W_3 + L_{33}\nu_r} \cdot \frac{\nu_2 - \nu_r}{\nu_2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Megfontolva már most azt, hogy megközelítőleg,

$$\frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_2}=1$$

és hogy teljes mágneses bekapcsolás esetére

$$\frac{\nu_3}{W_3+L_{33}\nu_3}=\frac{1}{L_{33}},$$

az általános megoldás:

$$V=-\frac{W_2E_1}{W_1}+A_1e^{\nu_1 t}+A_2e^{\nu_2 t}+A_3e^{\nu_3 t},$$

$$J_1=\frac{E_1}{W_1}-\frac{A_1}{W_2}e^{\nu_1 t}-\frac{\nu_2-\nu_3}{\nu_2}\cdot\frac{A_3}{W_2}e^{\nu_3 t},$$

$$J_3=\frac{L_{13}}{W_2}\cdot\frac{W_1A_1}{W_1L_{33}-W_3L_{11}}e^{\nu_1 t}+\frac{\nu_2-\nu_3}{\nu_2}\cdot\frac{L_{13}A_3}{W_2L_{33}}e^{\nu_3 t}.$$

Tekintettel már most a következő kezdőértékekre:

$$(V)_{t=0}=-E_1,\ (J_1)_{t=0}=(J_3)_{t=0}=0$$

az $A$-k számára a következő értékeket találjuk:

$$A_1=\frac{W_2E_1}{W_1}=0,$$

$$A_2=-E_1,$$

$$A_3=\frac{W_2L_{33}}{W_3L_{11}}\frac{\nu_2}{\nu_2-\nu_3}E_1=0.$$

Ennélfogva

$$\left.\begin{aligned}
V&=-\frac{W_2E_1}{W_1}+\frac{W_2E_1}{W_1}e^{\nu_1 t}-E_1e^{\nu_2 t},\\
J_1&=\frac{E_1}{W_1}-\frac{E_1}{W_1}e^{\nu_1 t}-\frac{L_{33}E_1}{L_{11}W_3}e^{\nu_3 t},\\
J_2&=-\frac{E_1}{W_1}+\frac{E_1}{W_1}e^{\nu_1 t}-\frac{E_1}{W_2}e^{\nu_2 t},\\
J_3&=-\frac{L_{13}E_1}{L_{11}W_3}e^{\nu_1 t}+\frac{L_{13}E_1}{L_{11}W_3}e^{\nu_3 t}.
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

Tehát nagy megközelítéssel

$$V = - E_1 e^{\nu_2 t},$$

$$\int V J_2 = - \frac{C E_1^2}{2} e^{2\nu_2 t}.$$

Ennélfogva az *áramzárás helyén keletkezett hő*

$$H = \frac{C E_1^2}{2}, \tag{33}$$

a mi megegyezik az első feladatban talált eredménynyel.

Mivel $\nu_3 = -\infty$, azért a szekundér tekercsben indukált elektromotoros erő

$$E_{33} = - \frac{L_{13}}{L_{11}} E_1 e^{\nu_1 t} = - \sqrt{\frac{L_{33}}{L_{11}}} \cdot E_1 e^{\nu_1 t}. \tag{34}$$

b) *Nyitáskor*

$$W_2 = \infty, \quad W_3 = \infty,$$

tehát a $\nu$-k meghatározására szolgáló egyenlet

$$\frac{C(L_{11}L_{33} - L_{13}^2)}{W_3} \nu^3 + C L_{11} \nu^2 + C W_1 \nu + 1 = 0, \tag{35}$$

honnan

$$(\nu_1, \nu_2) = - \frac{W_1}{2L_{11}} \pm i \sqrt{\frac{1}{C L_{11}} - \frac{W_1^2}{4 L_{11}^2}} = (a + i\omega, \ a - i\omega),$$

$$\nu_3 = - \frac{L_{11} W_3}{L_{11} L_{33} - L_{13}^2}.$$

A (30) alatt levő képlet alapján könnyű belátni, hogy

$$\frac{W_3 + L_{33}\nu}{\Delta(\nu)} = - C\nu.$$

$$- \frac{L_{13}\nu_r}{\Delta(\nu_r)} = \frac{C L_{13}}{W_3} \nu_r^2, \qquad (r=1, 2)$$

$$- \frac{L_{13}\nu_3}{\Delta(\nu_3)} = \frac{C L_{13} \nu_3}{L_{33}},$$

következőleg:

$$V = -E_1 + \sum_{r=1}^{3} A_r e^{\nu_r t},$$

$$J_1 = \quad -C \sum_{r=1}^{3} \nu_r A_r e^{\nu_r t},$$

$$J_3 = \frac{CL_{13}}{W_3}\left(\nu_1^2 A_1 e^{\nu_1 t} + \nu_2^2 A_2 e^{\nu_2 t} + \frac{\nu_3 W_3}{L_{33}} A_3 e^{\nu_3 t}\right).$$

Tekintettel a

$$(V)_{t=0} = 0, \; (J_1)_{t=0} = \frac{E_1}{W_1}, \; (J_3)_{t=0} = 0$$

kezdőértékekre

$$A_1, \; A_2 = \frac{a+bi}{2\omega}, \; \frac{a-bi}{2\omega}, \; A_3 = 0,$$

hol

$$a = \omega E_1,$$

$$b = \left(\frac{1}{CW_1} - \frac{W_1}{2L_{11}}\right) E_1,$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \frac{E_1}{CW_1}.$$

Ennélfogva $e^{\nu_3 t}$ elhanyagolásával

$$V = -E + \frac{E_1}{\omega C W_1} e^{at} \sin(\omega t + \delta),$$

$$J_1 = -\frac{E_1}{\omega W_1 \sqrt{CL_{11}}} e^{at} \sin(\omega t + \delta + \delta_1), \tag{35}$$

$$J_3 = \quad \frac{L_{13} E_1}{\omega C L_{11} W_1 W_3} e^{at} \sin(\omega t + \delta + 2\delta_1);$$

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{a}{b}, \; \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\omega}{a}.$$

Mivel $V$ értéke megegyezik a (18) alatt levő értékkel, azért az ott vont következtetések a jelen esetben is érvényesek, azaz:

*a kondenzátor az áramnyitáskor keletkező szikrázást jelentékenyen csökkenti.*

Ha $|a|$ elenyésző csekély $\omega$-hoz képest, akkor közelítőleg

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL_{11}}},$$

tehát teljes mágneses bekapcsolás esetére

$$J_3 = \frac{E_1}{W_1 W_3} \sqrt{\frac{L_{33}}{C}} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \delta + 2\delta_1). \tag{36}$$

Ennélfogva a szekundér tekercsben az áramnyitás alkalmával indukált elektromotoros erő

$$E_{3s} = \frac{E_1}{W_1} \sqrt{\frac{L_{33}}{C}} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \delta + 2\delta_1), \tag{37}$$

ellenben az áramzárás alkalmával indukált elektromotoros erő

$$\mathrm{E}_{3s} = -E_1 \sqrt{\frac{L_{33}}{L_{11}}} (e^{\nu_1 t} - e^{\nu_3 t}). \tag{38}$$

*Tehát $C$ alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a nyitás alkalmával indukált elektromotoros erő aránytalanul nagyobb legyen, mint az áramzáráskor indukált elektromotoros erő.* *A szekundér vezeték elektrodjai közé beiktatott dielektrikum vastagságának alkalmas megválasztásával azután elérhetjük, hogy csak $E_{3s}$, azaz a nyitási elektromotoros erő érvényesüljön az áram létesítésében.*

3. *A kapaczitásos és kapaczitás nélküli* RHUMKORFF-*féle szikrainduktorok összehasonlítása.*

Ha az első közlemény második fejezetének jelöléseit a jelen fejezet jelöléseivel összhangba akarjuk hozni, akkor csak a szekundér vezetékre vonatkozó fizikai mennyiségeket kell 3-as indexszel ellátni.

Ha már most az áramzárásra vonatkozó feltételeket még a $W_3 = \infty$ feltétellel bővítjük, a II. §. (19) egyenletének gyökei:

$$\nu_1 = -\frac{W_1}{L_{11}}, \quad \nu_3 = -\frac{L_{11} W_3}{L_{11} L_{33} - L_{13}^2},$$

a (XV) egyenletek pedig így módosulnak:

$$J_1 = \frac{E_1}{W_1} - \frac{E_1}{W_1} e^{\nu_1 t},$$
$$J_3 = -\frac{L_{13}}{L_{11} W_3} (e^{\nu_1 t} - e^{\nu_3 t}), \tag{39}$$

melyeket a (32) alatt levő egyenletekkel összehasonlítva a következő tételt nyerjük:

*Áramzárás alkalmával a kapaczitásos szikrainduktor tekercseiben indukált elektromotoros erők egyenlők a kapaczitás nélküli szikrainduktor megfelelő tekercseiben indukált elektromos erőkkel.*

*A kapaczitás nélküli induktor primértekercsében az indukált elektromotoros erő által létesített hő*

$$H = \int_0^\infty E_{1s} J_{1s} dt = \frac{E_1^2}{W_1} \int_0^\infty e^{2\nu_1 t} dt = \frac{L_{11}}{2} \left(\frac{E_1}{W_1}\right)^2.$$

*A kapaczitásos induktorban pedig az áram-zárás helyén keletkezett meleg:*

$$H = \frac{CE_1^2}{2}.$$

Áramnyitáskor úgy $W_1$, mint $W_3$ igen nagy lévén, tehát a II. §. (19) egyenletének gyökei:

$$\nu_3 = -\frac{W_1 L_{33} + W_3 L_{11}}{L_{11} L_{33} - L_{13}^2}, \quad \nu_1 = -\frac{W_1 W_3}{W_1 L_{33} + W_3 L_{11}},$$

következőleg úgy a primér, mint a szekundér tekercsben indukált elektromotoros erő végtelen kis ideig tart. Így pl.

$$J_3 = \frac{E_1}{R_1} \cdot \frac{W_1 L_{13}}{\sqrt{(L_{11} W_3 - L_{33} W_1)^2 + 4 W_1 W_3 L_{13}^2}} (e^{\nu_1 t} - e^{\nu_3 t}).$$

Teljes mágneses bekapcsolás esetére a szekundér tekercsben indukált elektromotoros erő

$$E_{3s} = -\frac{\nu_1 L_{13} E_1}{R_1} (e^{\nu_1 t} - e^{\nu_3 t}),$$

$$E_{3s\,\max.} = \frac{(\nu_1 - \nu_3) L_{13} E_1}{R_1} \cdot \left(\frac{\nu_1}{\nu_3}\right)^{\frac{\nu_3}{\nu_3 - \nu_1}},$$

mely a mily végtelen kis idő alatt megjelenik, ugyanoly végtelen kicsiny idő alatt meg is szűnik, ennélfogva:

*Áramnyitás alkalmával, míg a kapaczitásos induktorban lassan csillapodó periodusos elektromotoros erő, addig a kapaczitás nélküli induktorban végtelen gyorsan eltűnő, nem periodusos elektromotoros erő indukálódik.*

A kondenzátor nélküli induktorban a nyitási elektromotoros erő maximuma megközelítőleg

$$\frac{L_{13}E_1}{R_1}\cdot\frac{W_1W_3}{W_1L_{33}+W_3L_{11}}.$$

Ellenben a kondenzátoros induktorban a nyitási elektromotoros erő maximuma az

$$\frac{E_1}{R_1}\sqrt{\frac{L_{33}}{C}}$$

értéket közelíti meg. Csakhogy míg az előbbi abnormis nagy érték végtelen kis idő alatt eltűnik, addig az utóbbi csillapodása csekély.

Ha tehát az áram-megszakítás véges — de nem igen kicsiny — időközökben történik, akkor a kapaczitásos induktor szekundér tekercsében nagyobb intenzitású áram fog létesülni, mint a kapaczitás nélküli induktor szekundér tekercsében.

Ha pedig az áramszaggatás végtelen kis időközökben történik, akkor a kapaczitásos induktorban a még meg nem szünt indukált áramok föltétlenül zavarólag hatnak a következő áram-megszakítás által létesítendő indukczió lefolyására, ilyen zavar a kapaczitás nélküli induktornál nem fordulhat elő, ennélfogva:

*A kapaczitásos induktorok csak akkor előnyösek, ha az áramszaggatás nem igen kis időközökben történik, ellenben az előnyt a kapaczitás nélküli induktorok részére kell írnunk.*

Végül meg kell még emlékeznünk fejtegetéseink ideális karakteréről: midőn $W_3$-t mindig végtelen nagynak tételeztük fel, akkor hallgatagon azt mondtuk ki, hogy a szekundér tekercs elektrodjai közé dielektrikumot iktattunk, ámde ennek az ellenállása végessé lesz, ha a szikrázás megindul; áram-megszakításkor a beiktatott dielektrikum ellenállását szintén végtelen nagynak tételeztük fel, jóllehet az kezdetben nem az, hanem csak a szikrázás csillapultával lesz azzá. Ettől az ideális állásponttól ma még nem foszthatjuk meg kutatásainkat, de ez nem is fontos, mert hiszen némelykor nem annyira a tapasztalat elégtelensége, mint inkább a kutatásokban fellépő komplikácziók kényszerítenek bennünket a reálisnak ismert álláspontnak egy ideálisabbal való fölcserélésére.

4. Pl. *A telefon differencziálegyenlete.*

A feladó és felvevő állomás telefonjai vezetővel összekapcsoltan, alkossanak olyan áramkört, melynek az ellenállása $W$, autoindukcziós együtthatója $L$. Ha az áramintenzitást s az elektromotoros erőt rendre: $J$, illetőleg $E$-vel jelöljük, akkor a telefonban végbemenő jelenség tanulmányozására szolgáló egyenlet ily alakú lesz:

$$WJ + L\frac{dJ}{dt} = E.$$

Ha a feladó állomás telefonjának lemeze oly periodikus rezgést végez, melynek periodusa $\frac{2\pi}{\omega}$, akkor világos, hogy $E$ is ugyanilyen periodikus változáson megy keresztül, tehát

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

következőleg a telefon differencziálegyenlete:

$$L\frac{dJ}{dt} + WJ = E_0 \sin \omega t.$$

Ezt már az első közlemény *β)* pontjában megvitattuk.

## V. Áramkörrendszerek változó ellenállással.

Ha az áramkörök konfigurácziója megváltozik vagy folyton változik, akkor a létrejött jelenség tanulmányozására szolgáló egyenletrendszer már korántsem oly egyszerű, hogy a már előbbi fejezetben említett ideális álláspont elfoglalása szükségessé ne válnék.

De ha a reális természethez közel akarunk maradni, akkor azok a föltevések, melyek egyenletrendszerünk tárgyalását egyszerüsítik, már csak igen nagy óvatossággal választhatók meg. S éppen ezért — nehogy ideális álláspontunknak nem egészen óvatos megválasztása bennünket a reális természettől tulságosan messze vigyen — ezeknek a jelenségeknek általános tárgyalását elhagyom s csak néhány feladaton mutatom meg azt az eljárást, melyet jóval bonyolultabb egyenletrendszereink tárgyalásának egyszerűsítésére nézve követnünk kell, hogy a jelenséget, habár kissé idealizáltan is, könnyebben tanulmányozhassuk.

1. *Az egyszerű mikrofon.*

Ha az eddigi jelöléseinket megtartjuk, akkor rögtön belátható, hogy az egyszerű mikrofonban lefolyó jelenség tanulmányozására szolgáló differencziálegyenlet:

$$L\frac{dJ}{dt}+(W+W_0\cos\omega t)J=E, \tag{VI}$$

hol $\omega$ az ellenállást megváltoztató rezgés frekvencziája. Az

$$L\frac{dJ}{dt}+(W+W_0\cos\omega t)J=0 \tag{VI'}$$

differencziálegyenlet általános megoldása

$$J=Ae^{-\left(\frac{W}{L}t+\frac{W_0}{L\omega}\sin\omega t\right)}.$$

Ha már most $A$-t $t$ függvényének tekintjük s aztán $J$-nek ezt az értékét behelyettesítjük a (VI) alatt levő egyenletbe, akkor $A$ meghatározására egy oly differencziálegyenletet nyerünk, melyből

$$A=A_0+\frac{E}{L}\int e^{\frac{W}{L}t+\frac{W_0}{L\omega}\sin\omega t}dt, \tag{40}$$

$a$, $J_0$ és $\alpha$-val egyelőre határozatlan konstansokat jelölve, legyen

$$\frac{E}{L} \cdot e^{-\left(\frac{W}{L} t + \frac{W_0}{L\omega} \sin \omega t\right)} \int e^{\left(\frac{W}{L} t + \frac{W_0}{L\omega} \sin \omega t\right)} dt = a + J_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

ha ezt az egyenletet differencziáljuk, akkor egy oly egyenletet nyerünk, melyet az előttünk levővel összevetve, nyerjük, hogy

$$-\left(\frac{W}{L} + \frac{W_0}{L} \cos \omega t\right) [a + J_0 \sin(\omega t + \alpha)] + \\ + \frac{E}{L} = \omega J_0 \cos(\omega t + \alpha),$$

honnan a még ismeretlen konstansok meghatározására az $J_0 W_0$-al szorzott tag elhanyagolásával a következő egyenleteket nyerjük:

$$-\frac{W}{L} a + \frac{E}{L} = 0,$$

$$\omega L \cos \alpha + W \sin \alpha = -\frac{a W_0}{J_0}, \tag{41}$$

$$W \cos \alpha - \omega L \sin \alpha = 0,$$

honnan

$$a = \frac{E}{W},$$

$$J_0 = \frac{E}{W} \cdot \frac{W_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}}, \tag{41'}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{W}{\omega L}.$$

Következőleg:

$$J = \frac{E}{W} + \frac{E}{W} \cdot \frac{W_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \alpha) + A_0 e^{-\left(\frac{W}{L} t + \frac{W_0}{L\omega} \sin \omega t\right)}$$

Ennélfogva az egyszerű mikrofonban a staczionér állapot:

$$J = \frac{E}{W} + \frac{E}{W} \cdot \frac{W_0}{\sqrt{W^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \sin(\omega t + \alpha). \tag{43}$$

$J$-nek ez az értéke nem más, mint a (VI) alatt levő egyenlet egyik partikuláris megoldása, melyet úgy is meghatározhatunk, hogy a (VI) egyenletbe $J$ helyett $a + J_0 \sin(\omega t + \alpha)$-t helyettesítünk, a nyert egyenletet, miután a $W_0 J_0$-tal szorzott tagot elhagyjuk, sin $\omega t$ és cos $\omega t$ szerint rendezzük; az együtthatók zérussá téve épen a (41) alatt levő egyenleteket szolgáltatják. Eredményeink egyszerűségét azon ideális álláspontunknak köszönhetjük, melynél fogva $W_0 J_0$-t mint végtelen kicsinyt elhanyagoltuk, miután ez az állásfoglalásunk — ha $E$ nem végtelen, vagy $W$ nem végtelen kicsiny — a tapasztalással megegyezik, azért a (42) illetőleg a (43) egyenlettel jellemzett jelenség igen nagy megközelítéssel az egyszerű mikrofonban valóban végbemegy.

2. *Transzformátoros mikrofon.*

A transzformátoros mikrofon két áramkörből áll, az elsőbe be van kapcsolva az $E_1$ konstans elektromotoros erő, a mikrofon és a primér tekercs, a másodikba pedig a telefon és a szekundér tekercs. Az eddig használt jelöléseket megtartva a tanulmányozandó jelenséget tartalmazó differencziálegyenleteink ily alakúak:

$$\left.\begin{aligned} (W_1 + W_0 \cos \omega t) J_1 + L_{11} \frac{dJ_1}{dt} + L_{12} \frac{dJ_2}{dt} &= E, \\ W_2 J_2 + L_{22} \frac{dJ_2}{dt} + L_{21} \frac{dJ_1}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII)}$$

Ha már most megfontoljuk, hogy az előbbi feladatban a *tapasztalással is támogatott ideális álláspontunknál fogva*

$$J_1 = \frac{E_1}{W_1} + i_1,$$

*hol* $i_1 W_0 \cos \omega t$, *mint végtelen kicsiny elhanyagolható*, akkor még tekintettel arra, hogy

$$\frac{dJ_1}{dt} = \frac{di_1}{dt},$$

differencziálegyenleteink a következő alakba írhatók

$$\left.\begin{aligned} W_1 i_1 + L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{dJ_2}{dt} &= \frac{W_0 E_1}{W_1} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \\ W_2 J_2 + L_{22} \frac{dJ_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt}&; \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII')}$$

a mi teljesen azonos a második közleményben tárgyalt transzformatok (I') alatt levő differencziálegyenletrendszerével,[1] a mivel aztán a transzformátoros mikrofon problémáját megoldottnak tekinthetjük.

Ha a föntebb hangoztatott ideális álláspontunknak már az előbbi feladat (VI) egyenletében kifejezést adtunk volna, akkor annak megoldását már az első közleményben[2] megoldott s az

$$L\frac{di}{dt}+Wi=\frac{W_0E}{W}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$

egyenlettel jellemzett probléma megoldására vezettük volna vissza.

*Suták József.*

---

[1] Math. és Phys. Lapok XVIII. évf. 1909. p. 138.
[2] Math. és Phys. Lapok XVII. évf. 1908. p. 229.

*Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.*

# Kimutatás

*az 1910. évi január hó 1-től április hó 30-ig befolyt díjakról.*

Tagsági díjat fizettek:

**1906. évre**: Dietz Lajos 10 kor., Összesen ... ... ... ... 10 kor.

**1907. évre**: Kármán Ferencz 10 kor., dr. Kemény Ferencz 10 kor., Kovács János dr. 10 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Oberle Károly 10 kor., Róna Zsigmond 10 kor. Összesen ... ... ... ... 60 kor.

**1908. évre**: Balog Mór 10 kor., Bartoniék Géza 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bogyó Samu 10 kor., Borossay Dávid 6 kor., Éber József 10 kor., Jancsó Béla 6 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Juvancz Ireneusz 10 kor., Kármán Ferencz 10 kor., dr. Kemény Ferencz 10 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Ondrus Pál 6 kor., Pekár Dezső 10 kor., Ráth A. Lajos 10 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Rucsinszky Alajos 10 kor., Skopál István 10 kor., Streitmann András 10 kor., Szuppán Vilmos 10 kor., Wagner Alajos 10 kor., Waldapfel János 10 kor. Összesen ... ... 210 kor.

**1909. évre**: Benda Jenő 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bogyó Samu 10 kor., Borossay Dávid 6 kor., Bricht Lipót 10 kor., Éber József 10 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Frank István 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Hoór Mór dr. 10 kor., Jakucs István 6 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Kármán Ferencz 10 kor., Király László 6 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., Konkoly Thege Miklós dr. 10 kor., Kopp Lajos dr. 10 kor., Kövesi Ferencz dr. 6 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Lendvay Hugó 6 kor., Lengyel Endre 6 kor., Lengyel Imre 6 kor., bozóki Lengyel Sándor 10 kor., Pék János 6 kor., Pekár Dezső dr. 10 kor., Rátz László 10 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Rucsinszky Lajos 10 kor., Sós Ernő 10 kor., Söpkéz Sándor

10 kor., Straub Sándor 10 kor., Szabó Péter dr. 10 kor., Szekeres Kálmán dr. 10 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szijártó Miklós 10 kor., Wagner Alajos dr. 10 kor., Waldapfel János dr. 10 kor., Wéber Márton 6 kor., Winter József 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Összesen 382 kor.

**1910. évre**: Asbóth Emil 10 kor., Bálint Elemér 6 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Beke Manó dr. 10 kor., Bertram Brunó 6 kor., Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bozóky Endre dr. 10 kor., Buchböck Gusztáv dr. 10 kor., Demeter István 6 kor., Demeczky Mihály 10 kor., Eltscher Simon 6 kor., br. Eötvös Loránd dr. 10 kor., Feichtinger Győző 10 kor., Félegyházy Antal 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Goldziher Károly 10 kor., Halász Ernő 10 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Havas Miksa 10 kor. Heuer Ede 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hoór Mór 10 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Ilosvay Lajos dr. 10 kor., Jakucs István 6 kor., Javorik János 6 kor., Jónás Ödön 10 kor., Jordán Károly dr. 10 kor., Jurányi Henrik 10 kor., Kármán Ferencz 10 kor., Kherndl Antal 10 kor., Király László 6 kor., Király Henrik 6 kor., Kirchknopf András 6 kor., Kiss Gábor 10 kor., K. Kiss József 6 kor., Klatt Román 6 kor., Klúg Lipót dr. 6 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., Konkoly Thege Miklós 10 kor., Kopp Lajos dr. 10 kor., Korda Dezső 6 kor. 18 f., Koren Dénes 10 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., König Dénes 10 kor., Kőnig Gyula dr. 10 kor., Kövesligethy Radó 10 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Lakits Ferencz dr. 10 kor., Lengyel Béla 10 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lévay Ede dr. 10 kor., Lukhaub Gyula 6 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Marczell György 10 kor., Mattyasovszky Kászon 6 kor., Mihálovics Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor., Miller Gyula 6 kor, Módly Krizsó 6 kor., Molnár Szaniszló 6 kor., Muraközy Károly 10 kor., Müller József 10 kor., Nagy Dezső 10 kor., szőkefalvi Nagy Gyula 6 kor., Nagy József 10 kor., Nyáry Béla 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Ortvay Rezső 6 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pallos Béla Kajetán 6 kor., Pécsi Albert 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Pekár Dezső 10 kor., Privorszky Alajos 10 kor., Radó Simon 6 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignácz 10 kor., Rátz László 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Riegl Sándor 6 kor., Rucsinszky Lajos 10 kor., Sárközy Pál 6 kor., Schimanek Emil 10 kor., Schuller Alajos 10 kor., Simon Tádé 6 kor., Söpkéz Sándor 10 kor., Steiner Lajos 10 kor., Strausz Ármin 10 kor., Székely Károly 6 kor., Szijártó Miklós 10 kor., Szőke Béla 10 kor., Terlanday Emil 10 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Tőtössy Béla 10 kor., Tresztyánszky Sándor

6 kor., Vámos Dezső 10 kor., Wagner Alajos dr. 10 kor., Walther Béla 6 kor., Wartha Vincze dr. 10 kor., Wéber Márton 6 kor., Wittmann Ferencz 10 kor., Wodeczky József 10 kor., Zilahy László 6 kor., Zipernovszki Károly 10 kor., Összesen ... ... ... ... ... 942·18 K

**1912. évre**: Sinkó József 6 kor. Összesen ... ... ... 6 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

**1908. évre**: Budapest V. kerület állami főreáliskola 10 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 10 kor.

**1909. évre**: Budapesti II. k. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti X. k. áll. főgimnasium (Tisztviselőtelep) 10 kor., Kolozsvári kegy. rendi Kalazantinum 10 kor., Lőcsei áll. főreáliskola 10 kor., Miskolczi ev. ref. főgymn. 6 kor., Podolini kegy. rendi gymnasium 10 kor., Pozsonyi kir. kath. főgymnasium 10 kor., Szegzárdi áll. főgymn. 10 kor., Székelyudvarhelyi ref. főgymn. 10 kor., Zilahi ev. ref. főgymn. 6 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... 92 kor.

**1910. évre**: Bártfai áll. főgymnasium 10 kor., Békés-Csabai áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Beregszászi állami főgymnasium 10 kor., Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. ker. közs. főreáliskola 10 kor., Budapesti Dob utczai polgári fiúiskola 10 kor., Budapesti IV. ker. közs. felsőbb leányisk. 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főgymnasium 10 kor., Budapesti VIII. k. áll. főgymnasium 10 kor., Budapesti tud. egyetemi könyvtár 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgymn. 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. tanitónőképző 10 kor., Csiksomlyói r. kath. főgymasium 10 kor., Deési áll. főgymnasium 10 kor. Egri állami főreáliskola 6 kor., Eötvös kollegium, Budapest, 10 kor., Erzsébetvárosi áll. főgymn. 10 kor., Érsekujvári közs. kath. főgymn. 10 kor. Fogarasi áll. főgymn. 10 kor., Győri áll. főreáliskola 10 kor., Gyulai róm. kath. főgymn. 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgymn. 10 kor., Hajdúnánási ev. ref. főgymn. 6 kor., Jászberényi áll. főgymn. 10 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Kaposvári áll. főgymn. 10 kor., Karczagi ev. ref. főgymnásium 10 kor., Kecskeméti áll. főreáliskola 10 kor., Kecskeméti ref. főgimn. 6 kor., Kisujszállási ev. ref. főgymn. 10 kor., Kolozsvári tud. egyetemi ábrázoló geom. int. 10 kor., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Lugosi áll. főgimn. 6 kor., Makói áll. főgymn. 10 kor., Malaczkai zárd. főnökség 10 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgymn. 10 kor., Marosvásárhelyi áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Mezőberényi áll. polg. isk. 10 kor., Nagyenyedi Bethlen főiskola 10 kor., Nagyszebeni áll főgymn. 10 kor., Nagyváradi áll. főreáliskola 6 kor., Nyitrai kath. felsőbb leánysikola 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Privigyei kegy. rendi gymnasium 10 kor., Sepsi-szt-györgyi ev. ref. főgymn. 10 kor., Soproni ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreáliskola 6 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgymn. 10 kor., Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium 6 kor., Szentesi áll. főgymn. 10 kor., Székesfehérvári áll. főreáliskola 10 kor., Székesfehérvári áll. felsőbb leányisk. 10 kor., Temesvári áll. főgymn. 10 kor., Temesvári áll. főreáliskola 10 kor., Ujvidéki kir. kath. főgym. 10 kor., Ungvári áll. főreáliskola 10 kor, Ungvári kir. kath. főgymn. 10 kor., Zombori áll. főgymn. 10 kor. Összesen 562 kor.

*Összesen befolyt :*

| | | |
|---|---|---|
| Hátralékokból | 764 | kor. |
| F. és köv. évi tagsági díjakból | 942·18 | « |
| F. évi előfizetési díjakból | 562 | « |

Kelt Budapesten, 1910. évi április hó 30-án.

*Dr. Lévay Ede.*

## Kérelem.

A Mathematikai és Physikai Lapok f. évi III. füzetéhez postai befizető lapot mellékeltem. Felkérem a Társulat igen t. tagjait és előfizetőit, hogy a mellékelt befizető-lapot előző évi hátralékos, illetőleg most már esedékes f. évi tagdíjaik és előfizetési díjaik beküldésére felhasználni sziveskedjenek. Kérem egyszersmind az igen t. tagokat arra is, hogy minden lakhely, vagy lakásváltoztatásról egy levelezőlapon értesiteni sziveskedjenek, hogy a füzetek szétküldése körül zavarok ne támadjanak.

Budapesten, 1910. évi április hó 30-án.

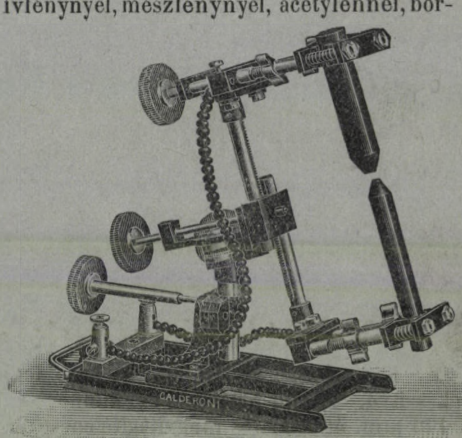
*Dr. Lévay Ede*
***pénztáros.***
VI., Nagy János-utcza 37.

# Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hűtővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van iglatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.





**Elektromos ívlámpa** legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—

**Elektromos ívlámpa** egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

**Borszesz-izzófénylámpa** légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

**Háromlábu asztalállvány,** mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110**.—

**Vetitési ernyő** finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

**Ernyő-állvány** fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30**.—

**Vetitési ernyők** zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

| | 200 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 cm. négyzetben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ára | **45**.— | **65**.— | **90**.— | **145**.— | **200**.— | **240**.— korona. |

**Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.**

*Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.*

Franklin-Társulat nyomdája

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV

TIZENKILENCZEDIK ÉVFOLYAM

V. FÜZET 1910 MÁJUS

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1910.

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A tizenkilenczedik társulati év 1910 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, sziveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János-utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

*Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.*

**Rendes ülések.** A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

*Igen tisztelt munkatársainkat* értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres boritékkal adjuk; nyomtatott boritékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

---

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

# AZ HADAMARD-FÉLE DETERMINÁNSTÉTEL EGY ELEMI BEBIZONYÍTÁSA.

Legyen

$$D = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

egy $n$-edfokú determináns, melynek elemei tetszésszerinti komplex számok; az $a_{ik}$ szám konjugált értékét jelöljük $\bar{a}_{ik}$-val. Akkor $D$ konjugált értéke

$$\bar{D} = \Sigma \pm \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} \dots \bar{a}_{nn}.$$

HADAMARD[1] a determináns absolut értékére felső határt adott, a mennyiben bebizonyította, hogy

$$|D|^2 = D\bar{D} = \Sigma \pm c_{11}c_{22} \dots c_{nn} \leqq c_{11}c_{22} \dots c_{nn}, \qquad \text{(I)}$$

a hol

$$c_{ik} = a_{i1}\bar{a}_{k1} + a_{i2}\bar{a}_{k2} + \dots + a_{in}\bar{a}_{kn}.$$

E tétel levezetése czéljából HADAMARD a következő általánosabb tételt bizonyítja be:

$$D\bar{D} \leqq (\Sigma \pm c_{11}c_{22} \dots c_{n-1,\,n-1}) \cdot c_{nn}. \qquad \text{(II)}$$

Minthogy e tételt az integrálegyenletek elméletében alkalmazzák, talán nem lesz érdektelen, ha oly bizonyítását közlöm, mely a determinánsoknak csupán legelemibb tulajdonságaira támaszkodik, ezután pedig a (II) tételnek FISCHERtől adott általánosítását vezetem le rövidebb úton, a folytonos

[1] Bulletin des sciences mathematiques (2), XVII (1893). Resolution d'une question relative aux déterminants.

függvényekre vonatkozó WEIERSTRASS-féle tétel felhasználásával.[1]

1. Az adott determinánst — értékének változtatása nélkül — ily alakra transformálom:

$$D=\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

úgy hogy elemei közt a következő relácziók álljanak fenn:

$$a_{i1}\bar{a}_{k1}+a_{i2}\bar{a}_{k2}+\cdots+a_{in}\bar{a}_{kn}=\gamma_{ik}=0$$
$$\begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,n \\ k=1,2,\ldots,n \\ i\neq k \end{pmatrix}$$

a mit úgy fejezek ki, hogy a sorok egymáshoz orthogonálisok legyenek.[2]

És ekkor

$$D\bar{D}=\gamma_{11}\gamma_{22}\ldots\gamma_{nn}. \qquad (\gamma)$$

A transformátiót a következő lépésekben érem el:

A determináns első sorát változatlanul meghagyom; lesz tehát

$$a_{11}=a_{11},\ a_{12}=a_{12},\ldots.\ a_{1n}=a_{1n}.$$

A második sort az első sorhoz orthogonálissá teszem az által, hogy helyébe ezt írom:

$$a_{21}=a_{21}+x_{11}a_{11},\ a_{22}=a_{22}+x_{11}a_{12},\ldots,a_{2n}=a_{2n}+x_{11}a_{1n},$$

a hol is $x_{11}$-t úgy határozom meg, hogy

$$(a_{21}+x_{11}a_{11})\,\bar{a}_{11}+(a_{22}+x_{11}a_{12})\,\bar{a}_{12}+\cdots+(a_{2n}+x_{11}a_{1n})\,\bar{a}_{1n}=0.$$

Most a harmadik sort az előzőkhöz orthogonálissá teszem az által, hogy helyébe ezt írom:

$$a_{31}=a_{31}+x_{12}a_{11}+x_{22}a_{21},\ldots,\ a_{3n}=a_{3n}+x_{12}a_{1n}+x_{22}a_{2n},$$

---

[1] Más bebizonyításokat illetőleg v. ö. WIRTINGER: Monatshefte f. Math. u. Phys. 1907. — FISCHER: Archiv der Math. u. Phys. Bd. 13, (1908).

[2] Ha $a_{i1},\ldots,a_{in}$ valósak és egy vektor koordinátái az $n$-dimenziós térben, akkor a relácziók azt fejezik ki, hogy a vektorok egymásra merőlegesek. Analog elnevezést vezetett be függvényekre HILBERT.

a hol tehát $x_{12}$ és $x_{22}$ az

$$(a_{31}+x_{12}a_{11})\bar{a}_{11}+\cdots+(a_{3n}+x_{12}a_{1n})\bar{a}_{1n}=0,$$
$$(a_{31}+x_{22}a_{21})\bar{a}_{21}+\cdots+(a_{3n}+x_{22}a_{2n})\bar{a}_{2n}=0$$

egyenletek által vannak meghatározva.

Ezen eljárást folytatom mindaddig, míg csak az utolsó sor is az összes előzőkhöz orthogonálissá nem lesz.

Ezen eljárás egyértelmű, mert az $x$-eket successive a lineáris egyenletekből kiszámíthatom, ha csak nem lesz valamely $x$ együtthatója zérus, de ez azt jelentené, hogy valamely $i$ indexre

$$a_{i1}=0,\ a_{i2}=0,\ldots,a_{in}=0$$

és ezen esetet a tárgyalásból kizárhatjuk, mivel ekkor $D=0$ és a tétel triviálissá lesz.

A bebizonyítandó tételre most már az a fontos körülmény vezet, hogy az egyes lépések a $c_{11}c_{22}\ldots c_{nn}$ szorzatot nem nagyobbítják, legfeljebb változatlanul hagyják. Mert az első sor nem változott, tehát

$$c_{11}=\gamma_{11};$$

a második sor változása csupán a $c_{22}$ tényezőt változtatja; és pedig $x_{11}$ úgy van meghatározva, hogy az

$$(a_{21}+xa_{11})(\bar{a}_{21}+\bar{x}\bar{a}_{11})+\cdots+(a_{2n}+xa_{1n})(\bar{a}_{2n}+\bar{x}\bar{a}_{1n})=\varphi(x)$$

kifejezés $x=x_{11}$ mellett minimummá lesz; ugyanis $\varphi(x)$ az

$$\left[x(a_{11}\bar{a}_{11}+\cdots+a_{1n}\bar{a}_{1n})^{\frac{1}{2}}+\frac{\bar{a}_{11}a_{21}+\cdots+\bar{a}_{1n}a_{2n}}{(a_{11}\bar{a}_{11}+\cdots+a_{1n}\bar{a}_{1n})^{\frac{1}{2}}}\right]\cdot$$
$$\cdot\left[x(a_{11}\bar{a}_{11}+\cdots+a_{1n}\bar{a}_{1n})^{\frac{1}{2}}+\frac{a_{11}\bar{a}_{21}+\cdots+a_{1n}\bar{a}_{2n}}{(a_{11}\bar{a}_{11}+\cdots+a_{1n}\bar{a}_{1n})^{\frac{1}{2}}}\right]=\psi(x)$$

szorzattól csak egy additiv állandóban különbözik, tehát $\varphi(x)$ minimuma helyett $\psi(x)$ minimumát vizsgálhatom; $\psi(x)$ pedig sohasem negativ, tehát minimummá lesz, ha a zérus értéket veszi fel, a mi épen az $x=x_{11}$ helyen következik be. De mivel $c_{22}=\varphi(0)$ és $\gamma_{22}=\varphi(x_{11})$, tehát be van bizonyítva, hogy

$$c_{22}\geqq\gamma_{22}.$$

Hasonló megjegyzés érvényes a harmadik sor változására; föntebb kimutattam, hogy azon $x$ érték, mely az $a_{2i}+xa_{1i}\,(i=1,\ldots,n)$ sort az $a_{1i}$ $(i=1,\ldots,n)$ sorhoz orthogonálissá teszi, egyúttal az $\sum\limits_{(i)}(a_{2i}+xa_{1i})(\bar{a}_{2i}+\bar{x}\bar{a}_{1i})$ kifejezést minimummá teszi, tehát most is — mutatis mutandis — azon $x_1$ érték, mely az $a_{3i}+x_1a_{1i}+x_2a_{2i}$ $(i=1,\ldots,n)$ sort az $a_{1i}$ $(i=1,\ldots,n)$ sorhoz orthogonálissá teszi ($x_2$-t egyelőre határozatlan paraméternek tekintve) egyúttal a $\sum\limits_{(i)}(a_{3i}+x_1a_{1i}+x_2a_{2i})(\bar{a}_{3i}+\bar{x}_1\bar{a}_{1i}+\bar{x}_2\bar{a}_{2i})$ kifejezést minimummá teszi, a mi az $x_1=x_{12}$ érték mellett következik be és továbbá mondhatom, hogy azon $x_2$ érték, mely az $a_{3i}+x_{12}a_{1i}+x_2a_{2i}$ $(i=1,\ldots,n)$ sort az $a_{2i}$ $(i=1,\ldots,n)$ sorhoz orthogonálissá teszi, egyúttal a

$$\sum_{(i)}(a_{3i}+x_{12}a_{1i}+x_2a_{2i})(\bar{a}_{3i}+\bar{x}_{12}\bar{a}_{1i}+\bar{x}_2\bar{a}_{2i})$$

kifejezést minimummá teszi. Ezzel be van bizonyítva, hogy

$$c_{33}\geqq\gamma_{33}.$$

Világos, hogy a többi sorok változására nézve analog megjegyzés érvényes, úgy hogy továbbá

$$c_{44}\geqq\gamma_{44},\ldots,c_{nn}\geqq\gamma_{nn}.$$

Ezen egyenlőtlenségeknek és a $(\gamma)$ egyenletnek az egybevetéséből következik, hogy

$$c_{11}c_{22}\ldots c_{nn}\geqq D\bar{D}, \qquad (\mathrm{I}')$$

a mi épen bebizonyitandó volt.

Közvetlenül világos, hogy (I')-ben az egyenlőségi jel lesz érvényes, ha a $c_{ii}$-k valemelyike eltűnik (azaz $a_{i1}=0$, $a_{i2}=0,\ldots,$ $a_{in}=0$), vagy ha $c_{ik}=0$ bármely $i$-re és $k$-ra $(i\neq k)$; de csakis ekkor, mert ha ezen feltételek egyike sem teljesül, akkor a bemutatott módon áttérhetek egy másik $D$ értékű determinánsra úgy, hogy a felső határ kisebbedik, tehát nem lehetett már a minimális.

A bebizonyítás menetén mit sem kell változtatnunk, hogy a tételt *tetszésszerinti* matrixokra is bebizonyítsuk.

2. A (II) tétel FISCHERtől eredő általánosítása a következő: *Legyen*

$$M = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad m \leqq n$$

*egy tetszésszerinti matrix, akkor*

$$M\bar{M} = \Sigma \pm c_{11}c_{22}\dots c_{mm} \leqq (\Sigma \pm c_{11}\dots c_{\varrho\varrho})(\Sigma \pm c_{\varrho+1,\varrho+1}\dots c_{mm}) \quad (M)$$

*vagy röviden*

$$M\bar{M} \leqq \Gamma(a_{ik})$$

*$\rho$ jelentheti az* 1, 2, ..., $m-1$ *számok valamelyikét.*

Három esetet különböztetek meg:

*α)* Az első $\rho$ oszlop minden $\rho$-adfokú aldeterminánsa eltűnik; ekkor a tétel triviálissá lesz ($M\bar{M}=0$).

*β)* A $\Gamma$-ban szereplő $\rho$-adfokú aldetermináns kivételével, az első $\rho$ oszlop többi $\rho$-adfokú aldeterminánsa eltűnik; ekkor $(M)$-ben az $=$ jel lép érvénybe.

*γ)* A $\Sigma \pm c_{11}c_{22}\dots c_{\varrho\varrho}$ aldeterminánson kívül képezhető még az első $\rho$ oszlopból legalább egy $\rho$-adfokú aldetermináns, mely nem tűnik el.[1]

Ez esetben az általánosság megszorítása nélkül feltehetem, hogy valamely $k$-ra, a mely nagyobb $\rho$-nál,

$$\Sigma \pm c_{k1}c_{22}\dots c_{\varrho\varrho} \neq 0.$$

Most a matrix $a_{ik}$ elemeit változóknak tekintem, úgy azonban, hogy

$$\Sigma \pm c_{11}c_{22}\dots c_{nn} = \text{Konstáns} > 0 \qquad (F)$$

legyen, a mivel az *α)* esetet kizárjuk.

Azaz tekintem a matrixok egy $mn-1$ dimenziós halmazát, melynek az adott $M$ matrix csak egyik egyede. Mivel $\Gamma$ az

[1] Egy negyedik eset nem képzelhető.

$a_{ik}$ elemek folytonos függvénye és mivel értéke zéruson felül marad, azért van minimuma, ha az $(F)$ föltétel teljesül. Tegyük föl, hogy e minimumot például az

$$M_u = \begin{Vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{Vmatrix}$$

matrix elemeivel érjük el; ha be tudom bizonyítani, hogy erre a matrixra a $\beta)$ eset áll be, akkor tételünk már be is van bizonyítva, mert hiszen akkor a $\beta)$ esetnek megfelelően volna

$$\Gamma_{min.} = \Gamma(\bar{u}_{ik}) = M_u\bar{M}_u = \text{Konstáns},$$

tehát

$$\Gamma(a_{ik}) \geqq M\bar{M},$$

a mi épen a bebizonyítandó tétel. Hogy pedig az $M_u$ matrixra tényleg a $\beta)$ eset áll be, azt következőképen mutatom ki:

Fölteszem az ellenkezőjét, akkor a $\gamma)$ esetnek megfelelően

$$\Sigma \pm z_{k1} z_{22} \dots z_{\varrho\varrho} \neq 0,$$

a hol

$$z_{ik} = u_{i1}\bar{u}_{k1} + u_{i2}\bar{u}_{k2} + \dots + u_{in}\bar{u}_{kn},$$

és ekkor $x$-t meg tudom úgy határozni, hogy az

$$M'_u = \begin{Vmatrix} u_{11}+xu_{k1} & \dots & u_{1n}+xu_{kn} \\ u_{21} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{Vmatrix}$$

matrixhoz tartozó $\Gamma(M'_u)$ érték kisebb legyen a minimumnak felismert $\Gamma(M_u)$ értéknél, a mi ellentmondásra vezet. Ugyanis $\Gamma(M'_u)$ és $\Gamma(M_u)$ csupán az első tényezőben különböznek egymástól; ezen első tényező $\Gamma(M_u)$-ban:

$$\Sigma \pm z_{11} \dots z_{\varrho\varrho} = \begin{vmatrix} z_{11} & \dots & z_{1\varrho} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{\varrho 1} & \dots & z_{\varrho\varrho} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{\varrho 1} & \dots & u_{\varrho n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \bar{u}_{11} & \dots & \bar{u}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{u}_{\varrho 1} & \dots & \bar{u}_{\varrho n} \end{Vmatrix},$$

és a megfelelő tényező $\Gamma(M'_u)$-ban:

$$\begin{Vmatrix} u_{11}+xu_{k1} & \dots & u_{1n}+xu_{kn} \\ u_{21} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{\varrho 1} & \dots & u_{\varrho n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \bar{u}_{11}+\bar{x}\bar{u}_{k1} & \dots & \bar{u}_{1n}+\bar{x}\bar{u}_{kn} \\ \bar{u}_{21} & \dots & \bar{u}_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{u}_{\varrho 1} & \dots & \bar{u}_{\varrho n} \end{Vmatrix}$$

avagy a matrixok szorzásának szabálya szerint kifejtve, e szorzat ily alakú

$$\Sigma \pm z_{11} z_{22} \dots z_{\varrho\varrho} + x \Sigma \pm z_{k1} z_{22} \dots z_{\varrho\varrho} + \bar{x} \Sigma \pm \bar{z}_{k1} \bar{z}_{22} \dots \bar{z}_{\varrho\varrho} +$$
$$+ x\bar{x} \Sigma \pm z_{kk} z_{22} \dots z_{\varrho\varrho}$$

és ez $x$ megfelelő választása mellett nyilván kisebbé tehető $\Sigma \pm z_{11} \dots z_{\varrho\varrho}$-nal, mivel $x$ együtthatója — feltételünk értelmében — a zérustól különböző.

Ezzel tételünk teljes egészében be van bizonyítva.

Világos, hogy $(M)$-ben az $=$ jel lesz érvényes az *α)* és *β)* esetekben; de csakis ekkor, mert a *γ)* esetben — miként láttuk — $\Gamma$ értéke nem minimális.

A tételt ismételten alkalmazva $\Gamma$ egyes tényezőire, nyerjük, hogy

$$M\bar{M} \leqq (\Sigma \pm c_{11} \dots c_{\varrho_1 \varrho_1}) (\Sigma \pm c_{\varrho_1+1, \varrho_1+1} \dots c_{\varrho_2 \varrho_2}) \dots$$
$$\dots (\Sigma \pm c_{\varrho_k+1, \varrho_k+1} \dots c_{mm})$$
$$(\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_k < m).$$

A mely egyenlőtlenség a (II) tételt és ennek Fischertől eredő általánosítását mint speczialis eseteket magában foglalja.

*Szász Ottó.*

# INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK SOROZATAI.

(Második és befejező közlemény.)

## 5. Lineáris integrálegyenletrendszer, melyben az együttható függvények normált, orthogonális rendszert alkotnak.

Az előző fejezetben bebizonyított tétel alapján könnyen válaszolhatunk a következő kérdésre:

Jelentse $\{a_i(x)\}$ az $[L^2]$ osztályba tartozó függvényeknek egy *orthogonális*, *1-re normált* vagyis olyan rendszerét, melyre

$$\int_a^b [a_i(x)]^2 dx = 1\,; \quad \int_a^b a_i(x)\, a_j(x)\, dx = 0.^1 \quad (i \neq j) \qquad (11)$$

Az $a_i(x)$ függvények mindegyikéhez egy-egy $c_i$ számot rendelünk. Létezik-e olyan $\xi(x)$ függvény, hogy minden $i$-re

$$\int_a^b a_i(x)\, \xi(x)\, dx = c_i\,,$$

és a mely minden olyan függvényre, melyre az összes $a_i(x)$ függvények orthogonálisak, szintén orthogonális?

Ha ilyen $\xi(x)$ függvény létezik, akkor a

---

[1] SCHMIDT ERHARD egy tétele szerint az ilyen rendszer véges vagy megszámlálható. Bár SCHMIDT tételét csak folytonos függvényekre fogalmazta meg, az az egész $[L^2]$ osztályra érvényes és úgy az ő bizonyítása (*Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues*, Paris, Comptes Rendus, 10 décembre 1906.) mint az enyém (*Sur les ensembles de fonctions sommables*, Paris, Comptes Rendus, 12 novembre 1906) az $[L^2]$ osztályra kiterjeszthető.

$$\int_a^b [\xi(x) - \sum_{i=1}^n c_i a_i(x)]^2 dx = \int_a^b [\xi(x)]^2 dx - \sum_{i=1}^n c_i^2 \qquad (12)$$

BESSEL féle egyenlőségből következő

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 \leqq \int_a^b [\xi(x)]^2 dx$$

egyenlőtlenség alapján léteznie kell a

$$\sum_i c_i^2, \qquad (13)$$

az összes $i$-kre képezett összegnek. Ennek az összegnek a létezése tehát szükséges föltétele a $\xi(x)$ függvény létezésének. Megmutatjuk, hogy ugyanez a föltétel elegendő is.

Jelentse $f(x)$ az $[L^2]$ függvényosztály tetszésszerinti függvényét. Fölteszszük, hogy (13) létezik. A BESSEL-féle egyenlőség alapján következik, hogy a

$$\sum_i [\int_a^b a_i(x) f(x)\, dx]^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

összeg is létezik. A két összeg létezéséből a CAUCHY-féle, egyenlőtlenség alapján következik a

$$\sum_i c_i \int_a^b a_i(x) f(x)\, dx \qquad (14)$$

összeg létezése.

Értelmezzük a $\Xi[f(x)]$ operácziót oly módon, hogy az $[L^2]$ osztály minden $f(x)$ függvényéhez a megfelelő (14) alatti összeget rendeljük. Világos, hogy az operáczió disztributiv. Az operáczió egyszersmind határolt is, mert

$$[\sum_i c_i \int_a^b a_i(x) f(x)\, dx]^2 \leqq \sum_i c_i^2 \sum_i [\int_a^b a_i(x) f(x)\, dx]^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_i c_i^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

A $\Xi[f(x)]$ operáczió e szerint lineáris. Az előző fejezetben bebizonyitott tétel alapján tehát van olyan $\xi(x)$ függvény, hogy minden $f(x)$ függvényre

$$\Xi[f(x)] = \int_a^b \xi(x) f(x)\, dx.$$

Ha $f(x) = a_i(x)$, akkor a (11) egyenlőségek folytán

$$\Xi[f(x)] = c_i;$$

tehát

$$\int_a^b \xi(x)\, a_i(x)\, dx = c_i.$$

Ha pedig valamennyi $i$-re

$$\int_a^b a_i(x) f(x)\, dx = 0,$$

akkor egyszersmind

$$\int_a^b \xi(x) f(x)\, dx = \Xi[f(x) = \sum_i c_i \int_a^b a_i(x) f(x)\, dx = 0.$$

A $\xi(x)$ függvény tehát kielégíti a kérdésünkben megszabott mindkét követelést.

Megmutatjuk még, hogy nincsen még egy $\xi(x)$-től lényegesen különböző olyan $\xi'(x)$ függvény, mely ama követeléseket szintén kielégíti. Ugyanis, ha $\xi'(x)$ ilyen függvény, akkor minden $i$-re

$$\int_a^b a_i(x)\, [\xi(x) - \xi'(x)]\, dx = c_i - c_i = 0;$$

vagyis a $\xi(x) - \xi'(x)$ függvény az összes $a_i(x)$ függvényekre orthogonális. Tehát úgy $\xi(x)$ mint $\xi'(x)$ orthogonálisak a $\xi(x) - \xi'(x)$ függvényre, minélfogva ez önmagára orthogonális. Vagyis nullfüggvény.

Megmutatjuk még, hogy

$$\int_b^b [\xi(x)]^2 dx = \sum_i c_i^2. \qquad (15)$$

Tényleg

$$\int_a^b [\xi(x)]^2 dx = \Xi[\xi(x)] = \sum_i c_i \int_a^b a_i(x)\, \xi(x)\, dx = \sum_i c_i^2.$$

Végül (15)-ből a (12) alatti egyenlőség alapján

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [\xi(x) - \sum_{i=1}^n c_i a_i(x)]^2 dx = 0.$$

Az ebben a fejezetben nyert eredményeinket a következő tétellel foglaljuk össze:

*Ha $\{a_i(x)\}$ a függvényeknek egy orthogonális, 1-re normált rendszere, úgy az*

$$\int_a^b a_i(x)\,\xi(x)\,dx = c_i \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

*egyenletrendszernek akkor és csak akkor van az $[L^2]$ osztályba tartozó megoldó függvénye, ha az összes i-kre kiterjesztett*

$$\sum_i c_i^2$$

*összeg létezik. Ha ez a föltétel teljesítve van, akkor az egyenletrendszernek van egy és lényegben csak egy olyan megoldó függvénye, mely minden az összes $a_i(x)$ függvényekre orthogonális függvényre szintén orthogonális. Erre a $\xi(x)$ függvényre*

$$\int_a^b [\xi(x)]^2 dx - \sum_i c_i^2 = \lim_{n=\infty} \int_a^b [\xi(x) - \sum c_i a_i(x)]^2 dx = 0.$$

Tételünknek fontos korolláriuma a következő:

*Ha $\{a_i(x)\}$ a függvényeknek egy orthogonális, 1-re normált rendszere és ha az $[L^2]$ osztályba tartozó $f(x)$ függvény minden az összes $a_i(x)$ függvényekre orthogonális függvényre szintén orthogonális, akkor*

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_i [\int_a^b a_i(x) f(x)\,dx]^2 =$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_a^b [f(x) - \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b a_i(y) f(y)\,dy]^2 dx = 0. \qquad (16)$$

Különös fontos az az eset, ha a nullfüggvényeken kívül nincsen olyan függvény, mely valamennyi $a_i(x)$ függvényre orthogonális, vagyis más szóval, ha az $\{a_i(x)\}$ rendszer az $[L^2]$

függvényosztálynak egy *teljes* rendszere. Ebben az esetben a (16) határegyenlőségek *minden az* $[L^2]$ *osztályba tartozó* $f(x)$ *függvényre érvényesek.* Ilyen teljes rendszert alkotnak például a $(0, 2\pi)$ közön értelmezett, a FOURIER-féle sornál föllépő

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos ix, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin ix, \ldots$$

függvények. A korolláriumként megfogalmazott tételt arra az esetre, hogy a benne szereplő orthogonális rendszer a fönti FOURIER-féle, FATOU bizonyította be;[1] miután már az $[L^2]$-nél szűkebb függvényosztályokra való érvényességét többen megmutatták. A tétel különösen triviálisan kéznélfekvő abban az esetben, midőn az $f(x)$ függvény FOURIER-féle sora egyenletesen összetartó.

## 6. Integrálra erősen összetartó függvénysorozatok. Fischer tétele.

Az előző fejezetben származtatott tételnek érdekes általánosítása FISCHERnek egy tétele, melyet a jelen fejezetben ismertetünk.[2]

Hogy a tételt egyszerűen fogalmazhassuk, előbb nevet adunk egy konvergencziafogalomnak. Az $\{f_i(x)\}$ függvénysorozatról azt mondjuk, hogy a sorozat *integrálra erősen tart* az $f(x)$ függvényhez, ha

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b [f(x)-f_i(x)]^2\,dx = 0.$$

[1] P. FATOU: *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, l. cit. p. 379.

[2] E. FISCHER: *Sur la convergence en moyenne*, l. cit. FISCHER tétele különben a FOURIER-sorokra adott tételemből, mint a mely különben is tökéletes kapcsolatot létesít az összetartó négyzetösszegű, megszámlálhatóan végtelen sok változó analizise és a függvényanalizis megfelelő feladatai közt, SCHMIDT egy analog konvergenczia-tételének (*Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Palermo, Rendiconti del Circolo Matematico, t. XXV (1908) p. 59.) felhasználásával is származtatható.

Az előző fejezetben származtatott tételünk egy lényeges pontját az új elnevezés alkalmazásával a következőképen fogalmazhatjuk meg: Ha a $\sum c_i^2$ sor összetartó, akkor létezik olyan $\xi(x)$ függvény, hogy az

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(x)$$

függvények sorozata integrálra erősen a $\xi(x)$ függvényhez tart. A $\xi(x)$ függvény ezen tulajdonsága alapján a többi tételünkben részletezett tulajdonság könnyen fölismerhető.

Ha még tekintetbe veszszük, hogy az a föltevés, hogy a $\sum c_i^2$ sor összetartó, úgy is fogalmazható, hogy

$$\lim_{m=\infty,\, n=\infty} \int_a^b [s_n(x) - s_m(x)]^2 dx = 0,$$

akkor világosan látjuk, hogy miként illeszkedik be tételünk a következő FISCHER-féle tételbe:

*Annak, hogy valamely megadott $\{f_i(x)\}$ függvénysorozathoz létezzék olyan $f(x)$ függvény, mely felé a sorozat integrálra erősen konvergál, szükséges és elegendő föltétele, hogy*

$$\lim_{m=\infty,\, n=\infty} \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx = 0$$

*legyen.*

A föltétel szükséges volta világosan következik a (2) alatti egyenlőtlenségből $\big(n=2,\ c_1=c_2=1,\ f_1(x)=f(x)-f_m(x),\ f_2(x)=f_n(x)-f(x)\big)$. Hogy a föltétel elégséges is, azt a lineáris operáczió integrálelőállításáról szóló tételünk segítségével egész hasonló módszerrel mutathatjuk meg, mint a melyet az előző fejezetben alkalmaztunk.

Jelentse ugyanis $g(x)$ az $[L^2]$ függvényosztály tetszésszerinti függvényét. Az

$$\left[\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]\, g(x)\, dx\right]^2 \leqq \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

egyenlőtlenség alapján következik, hogy ha csak föltételünk teljesítve van, úgy létezik a

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, g(x)\, dx$$

határérték. Értelmezzük az $F[g(x)]$ operácziót oly módon, hogy minden $g(x)$ függvényhez a megfelelő határértéket rendeljük. Világos, hogy az operáczió disztributiv. Hogy az operáczió határolt, az a SCHWARZ-féle egyenlőtlenség alapján könnyen átlátható, ha csak megmutatjuk, hogy az

$$\int_a^b [f_n(x)]^2 dx \tag{17}$$

integrálértékek egy véges határ alatt feküsznek. De a (3) alatti egyenlőtlenség alapján

$$\left[\left[\int_a^b [f_n(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} - \left[\int_a^b [f_m(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\right]^2 \leqq \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx$$

és ennélfogva a (17) értékek növekvő $n$-nel egy határértékhez tartanak; tehát egyszersmind véges határ alatt is feküsznek.

Az $F[g(x)]$ operáczió e szerint lineáris. Létezik tehát olyan $f(x)$ függvény, hogy az $[L^2]$ osztály minden $g(x)$ függvényére

$$F[g(x)] = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Megmutatjuk, hogy *az $\{f_n(x)\}$ sorozat integrálra erősen tart az $f(x)$ függvény felé.*

A föltétel szerint minden tetszésszerint kicsiny pozitiv $\varepsilon$ számhoz van olyan $n$, hogy ha csak $h, k \geqq 0$, úgy

$$\int_a^b [f_{n+k}(x) - f_{n+h}(x)]^2 dx \leqq \varepsilon^2.$$

A SCHWARZ-féle egyenlőtlenség alapján tehát

$$\left[\int_a^b [f(x) - f_{n+h}(x)]\, g(x)\, dx\right]^2 = \left[F[g(x)] - \int_a^b f_{n+h}(x)\, g(x)\, dx\right]^2 =$$

$$= \lim_{k=\infty} \left[\int_a^b [f_{n+k}(x) - f_{n+h}(x)]\, g(x)\, dx\right]^2 \leqq \varepsilon^2 \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

Tegyünk $g(x)$ helyére $f(x)-f_{n+h}(x)$-et; akkor

$$\int_a^b [f(x)-f_{n+h}(x)]^2 dx \leqq \varepsilon^2.$$

Ennélfogva

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2 dx = 0;$$

vagyis az $\{f_n(x)\}$ sorozat integrálra erősen az $f(x)$ függvényhez konvergál.

Megmutatjuk még, hogy lényegben csak egy olyan $f(x)$ függvény létezik, mely felé az $\{f_n(x)\}$ sorozat integrálra erősen konvergál.

Ha ugyanis $f(x)$, $f'(x)$ két ilyen függvény, akkor a (2) alatti egyenlőtlenség alapján minden $n$-re

$$\left[\int_a^b [f(x)-f'(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \left[\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \left[\int_a^b [f'(x)-f_n(x)]^2 dx\right]^{\frac{1}{2}},$$

vagyis

$$\int_a^b [f(x)-f'(x)]^2 dx = 0.$$

A két függvény különbsége tehát nullfüggvény.

Megjegyezzük még, hogy a (3) alatti egyenlőtlenség alapján, ha az $\{f_n(x)\}$ sorozat integrálra erősen tart az $f(x)$ függvényhez, úgy

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b [f_n(x)]^2 dx.$$

Integrálra erősen konvergens sorozat és határfüggvénye tetszésszerinti számmal, sőt tetszésszerinti integrálható határolt függvénynyel *szorozható.* A (2) alatti egyenlőtlenség alapján pedig könnyen következik, hogy ha végesszámú integrálra erősen összetartó sorozat megfelelő függvényeit *összeadjuk,* az így nyert sorozat integrálra erősen tart a határfüggvények összegéhez.

**7. Integrálra összetartó függvénysorozatok. A lineáris operáczió és az integrálra összetartó sorozatok.**

Jelentsen

$$A\,[f(x)] = \int_a^b a(x)\,f(x)\,dx$$

egy tetszésszerinti lineáris függvényoperácziót. Ha az $\{f_i(x)\}$ sorozat integrálra erősen az $f(x)$ függvényhez tart, akkor az

$$\left[\int_a^b a(x)\,[f(x)-f_i(x)]\,dx\right]^2 \leqq \int_a^b [a(x)]^2 dx \int_a^b [f(x)-f_i(x)]^2 dx$$

egyenlőtlenség alapján következik, hogy

$$\lim_{i=\infty} A\,[f_i(x)] = A\,[f(x)].$$

E szerint a lineáris operáczió az integrálra erősen való összetartásra nézve *folytonos* operáczió.

Megmutatjuk, hogy van olyan *általánosabb* konvergenczia-fogalom, melyre nézve minden lineáris operáczió szintén folytonos.

Az $\{f_i(x)\}$ függvénysorozatról azt fogjuk mondani, hogy *integrálra az $f(x)$ függvényhez tart,* ha

1. az

$$\int_a^b [f_i(x)]^2 dx$$

értékek egy $G^2$ határ alatt maradnak;

2. az $(a, b)$ közben fekvő minden $\xi$ helyre $[a < \xi \leqq b]$

$$\int_a^\xi f(x)\,dx = \lim_{i=\infty} \int_a^\xi f_i(x)\,dx.^1$$

---

1 Az integrálra nézve való összetartás fogalmát első ízben «A lineár homogén integrálegyenletről» cz. dolgozatomban (Mathematikai és Természettudományi Értesitő XXVII. k. (1909) pp. 220—240.) értelmeztem és alkalmaztam. A 2. pontban foglalt föltevést ott nem az $(a, \xi)$ közökre, hanem az $(a, b)$ köz összes mérhető halmazaira fogalmaztam meg; ez, a mint látnivaló, fölösleges.

Az integrálra erősen összetartó sorok *az új értelmezés szerint is összetartók* és pedig ugyanazon függvényhez tartanak. Hogy azonban az új értelmezés az előbbinél általánosabb, annak egyszerű példái a $\sin(ix)$ és $\cos(ix)$ $(i=1, 2, \ldots)$ sorozatok; ezek a sorozatok bármely véges közön integrálra 0-hoz tartanak, ellenben integrálra erősen nem összetartók.

Az imént értelmezett konvergencziafogalom egyébként nem csupán az analogiára szorítkozó, hanem benső összefüggésben van azzal a konvergencziafogalommal, melyet HILBERT végtelen sok változó teljesen folytonos (vollstetig) függvényének értelmezésére alkalmaz.

Megmutatjuk, hogy *ha az* $\{f_i(x)\}$ *sorozat integrálra az* $f(x)$ *függvényhez tart, akkor az* $f(x)$ *függvény is az* $[L^2]$ *osztályba tartozik és*

$$\int_a^b a(x) f(x)\, dx = A\,[f(x)] = \lim_{i=\infty} A\,[f_i(x)] = \lim_{i=\infty} \int_a^b a(x) f_i(x)\, dx.$$

Az, hogy $f(x)$ az $[L^2]$ függvényosztályba tartozik és hogy négyzetintegrálja $\leqq G^2$, a 3. fejezetben származtatott kritérium alapján a (9) alatti egyenlőtlenség alkalmazásával következik az 1. és 2. föltevésekből. A mi állításunk második részét illeti, annak igazsága abban az esetben, ha $\alpha(x)$ olyan függvény, mely csupán végesszámú részközön vesz föl közönkint különböző értékeket, az értelmezésből közvetlenül következik. Minden ilyen $\alpha(x)$ függvényre e szerint tényleg

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b \alpha(x)\,[f(x)-f_i(x)]\, dx = 0.$$

Ha már most $a(x)$ az $[L^2]$ osztályba tartozó tetszésszerinti függvény, $\delta^2$ pedig tetszésszerint kicsiny pozitiv szám, akkor a 2. fejezet végén származtatott tétel szerint van olyan közönkint állandó $\alpha(x)$ függvény, hogy

$$\int_a^b [a(x)-\alpha(x)]^2 dx < \delta^2.$$

A (2) és (3) alatti egyenlőtlenségek alapján tehát

$$\left[\int_a^b [\alpha(x)-a(x)]\,[f(x)-f_i(x)]\,dx\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \delta^2 \int_a^b [f(x)-f_i(x)]^2 dx \leqq 4\delta^2 G^2,$$

azaz

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b \alpha(x)\,[f(x)-f_i(x)]\,dx = \lim_{i=\infty} \int_a^b a(x)\,[f(x)-f_i(x)]\,dx = 0.$$

Integrálra összetartó sorozatok ép úgy mint az erősen összetartók, konstanssal vagy határolt függvénynyel tagonkint *szorozhatók*, végesszámú gyengén összetartó sorozat tagonkint *összeadható.*

Meg lehet mutatni, hogy az imént értelmezett konvergenczia a legáltalánosabb azok közül, melyekre nézve minden lineáris operáczió folytonos, vagy más szóval áll a következő tétel: *Ha az* $\{f_i(x)\}$ *sorozat és az* $f(x)$ *függvény olyanok, hogy minden az* $[L^2]$ *osztályba tartozó* $a(x)$ *függvényre*

$$\int_a^b a(x) f(x)\,dx = \lim_{i=\infty} \int_a^b a(x) f_i(x)\,dx,$$

*akkor az* $\{f_i(x)\}$ *sorozat integrálra gyengén az* $f(x)$ *függvényhez tart.*

A tétel bizonyítását mellőzzük, mivel a tételt nem alkalmazzuk. A tétel különben hozzájárul a két konvergenczia-fogalom jelentőségének következő megvilágításához:

Legyen $\{a_n(x)\}$ az $[L^2]$ osztály függvényeinek egy sorozata, $a(x)$ ugyanazon osztály egy függvénye. Az $a_n(x)$, $a(x)$ függvények mindegyike egy-egy

$$A_n[f(x)] = \int_a^b a_n(x) f(x)\,dx, \quad A[f(x)] = \int_a^b a(x) f(x)\,dx$$

lineáris operácziót értelmez. Az az állítás, hogy az $\{a_n(x)\}$ sorozat integrálra az $a(x)$ függvényhez tart, az imént említett tétel szerint equivalens azzal, hogy minden $f(x)$ függvényre az $A_n[f(x)]$ értékek az $A[f(x)]$ értékhez konvergálnak. Ha azonban még azt is követeljük, hogy ez az utóbbi konvergenczia minden olyan függvényhalmazon, melyre a négyzetintegrálok egy véges határ alatt feküsznek, *egyenletes* legyen, úgy ennek szükséges és elegendő föltétele az, hogy az $\{a_n(x)\}$ sorozat az $a(x)$ függvényhez integrálra erősen konvergáljon.

## 8. Egy létezési tétel.

Bebizonyitjuk a következő tételt, mely a ponthalmazok elméletében alapvető Bolzano-Weierstrass-féle tételre emlékeztet:

*Ha az $[L^2]$ függvényosztály egy részhalmaza*

1. *transzfinit, azaz végtelen sok függvényből áll;*
2. *a halmaz összes függvényeinek négyzetintegráljai egy $G^2$ határ alatt feküsznek:*

*akkor a függvényhalmazban foglaltatik legalább egy (tehát végtelen sok) integrálra összetartó sorozat.*

Ha ugyanis a 2. föltétel teljesítve van, akkor a halmaz függvényeinek

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

integrálfüggvényei a Schwarz-féle egyenlőtlenség folytán összességükben határoltak; azonkívül ugyanazon egyenlőtlenség alapján

$$[F(x+\varepsilon)-F(x)]^2 = [\int_x^{x+\varepsilon} f(x)\,dx]^2 \leqq \varepsilon G^2.$$

Vagyis az összes $F(x)$ függvények *összességükben határoltak és egyenlő mértékben folytonosak.* Ha tehát még 1. is teljesítve van, akkor Arzela egy tétele szerint[1] az $F(x)$ függvények halmaza tartalmaz olyan $\{F_n(x) = \int_a^x f_n(x)\,dx\}$ sorozatot, mely egyenletesen tart egy $F^\star(x)$ függvényhez. Minthogy

[1] C. Arzela: *Sul principio di Dirichlet*, Rendiconti d. R. Accad. delle Scienze dell Ist. di Bologna nuova serie, vol. I (1896—97), pp. 71—84.

továbbá (9) alapján, bárhogy is osztjuk részközökre az $(a, b)$ közt, valamennyi $F(x)$ függvényre

$$\sum_k \frac{[F(x_{k+1})-F(x_k)]^2}{x_{k+1}-x_k} \leqq G^2,$$

azért az $F^{\star}(x)$ határfüggvényre is

$$\sum_k \frac{[F^{\star}(x_{k+1})-F^{\star}(x_k)]^2}{x_{k+1}-x_k} \leqq G^2.$$

Vagyis a 3. fejezetben származtatott tétel szerint $F^{\star}(x)$ egy az $[L^2]$ osztályba tartozó függvény határozott integrálja. Mivel még $F^{\star}(a)=0$, azért

$$\int_a^x f^{\star}(x)\,dx = F^{\star}(x) = \lim_{n=\infty} F_n(x) = \lim_{n=\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx;$$

vagyis az $\{f_n(x)\}$ sorozat integrálra az $f^{\star}(x)$ függvényhez konvergál.

## 9. Fischer tételének második bizonyítása.

Az integrálra összetartó sorokra nyert tételeink segítségével a Fischer-féle tételnek egy az elsőtől lényegesen különböző, új bizonyítását mutatjuk be.

Szükségünk lesz még a következő segédtételre: *Ha a $\{g_i(x)\}$ sorozat integrálra a $g(x)$ függvényhez tart és ha valamennyi $n$ indexre*

$$\int_a^b [g_n(x)]^2 dx \leqq G^2,$$

*akkor egyszersmind*

$$\int_a^b [g(x)]^2 dx \leqq G^2.$$

Ugyanis

$$\int_a^b [g(x)]^2 dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b g(x)\, g_n(x)\, dx;$$

$$[\int_a^b g(x)\, g_n(x)\, dx]^2 \leqq \int_a^b [g(x)]^2 dx \int_a^b [g_n(x)]^2 dx \leqq G^2 \int_a^b [g(x)]^2 dx;$$

tehát

$$\left[\int_a^b [g(x)]^2 dx\right]^2 \leqq G^2 \int_a^b [g(x)]^2 dx;$$

vagyis

$$\int_a^b [g(x)]^2 dx \leqq G^2.$$

Ezután áttérhetünk a Fischer-féle tétel bebizonyítására. Fölteszszük, hogy az $\{f_i(x)\}$ függvénysorozatra

$$\lim_{m=\infty,\, n=\infty} \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

Az

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx$$

értékek tehát mindenesetre egy *véges határ alatt feküsznek*. A (3) alatti egyenlőtlenség alapján ennélfogva *véges határ alatt feküsznek az összes*

$$\int_a^b [f_i(x)]^2 dx$$

*értékek is.* Az előző fejezetben bebizonyított tétel szerint tehát az $\{f_i(x)\}$ sorozatnak mindenesetre van olyan $\{f_{n_i}(x)\}$ részsorozata, mely integrálra egy $f(x)$ függvényhez konvergál. Az $\{f_{n_i}(x) - f_m(x)\}$ sorozat ekkor integrálra az $f(x) - f_m(x)$ függvényhez tart. Segédtételünket erre a sorozatra alkalmazva

$$\int_a^b [f(x) - f_m(x)]^2 dx \leqq \overline{\lim_{i=\infty}} \int_a^b [f_{n_i}(x) - f_m(x)]^2 dx;$$

vagyis végül

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b [f(x) - f_m(x)]^2 dx \leqq \lim_{i=\infty,\, m=\infty} \int_a^b [f_{n_i}(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

## 10. Fischer tételének harmadik bizonyítása.

A Fischer-féle tételnek az a harmadik bizonyítása, melyet ebben a fejezetben közlök, az előző kettőtől kiváltképen abban különbözik, hogy míg amazok azt a függvényt, melynek létezését a tétel állítja, lényegben mint egy sorozat által értelmezett függvény differencziálhányadosát szerkesztik meg, addig az itt adandó bizonyításban a határfüggvényt *integráczió és differencziáczió nélkül mint a megadott $\{f_i(x)\}$ sorozatból alkalmas módon kiválogatott sorozat határfüggvényét állítjuk elő.*[1]

Tényleg, könnyű átlátni, hogy ha az $\{f_i(x)\}$ sorozatból, melyre nézve

$$\lim_{m=\infty,\, n=\infty} \int_a^b [f_n(x)-f_m(x)]^2 dx = 0,$$

sikerül egy olyan $\{f_{n_i}(x)\}$ sorozatot kiszemelnünk, mely általában (vagyis legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével) egy $f(x)$ függvényhez tart, akkor egyszersmind az $\{f_i(x)\}$ sorozat integrálra erősen tart az $f(x)$ függvényhez. Ez esetben ugyanis, ha $f_m(x)$ a sorozat tetszésszerinti függvénye, az $\{f_{n_i}(x)-f_m(x)\}$ sorozatra és a sorozat $f(x)-f_m(x)$ határfüggvényére teljesítve vannak a 2. fejezetben ismertetett FATOU-féle tétel föltevései; a tétel tehát alkalmazható, vagyis

$$\int_a^b [f(x)-f_m(x)]^2 dx \leqq \overline{\lim_{i=\infty}} \int_a^b [f_{n_i}(x)-f_m(x)]^2 dx;$$

tehát tényleg

$$\lim_{m=\infty} \int_a^b [f(x)-f_m(x)]^2 dx = 0.$$

A konvergens $\{f_{n_i}(x)\}$ sorozatot az $\{f_i(x)\}$ sorozatból a következő eljárással választjuk ki: Megadjuk a lényegesen pozitiv tagokból álló összetartó $\sum p_i$ sort. Az $f_{n_i}(x)$ függvényt a következő előírással értelmezzük: ha $i>1$, akkor $f_{n_i}(x)$ az első olyan

---

[1] Ezen az eljáráson alapszik a tetszésszerinti $p>0$ hatványkitevőre kiterjesztett tételnek az a bizonyítása, melyet *Sur les suites de fonctions mesurables* (Paris, Comptes Rendus, 17 mai 1909) czímű dolgozatomban adtam, továbbá H. WEYL-nek egy ettől függetlenül talált, kevéssel utóbb megjelent bizonyítása (*Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten,* Mathem. Annalen, Bd. 67, pp. 225—245).

az $\{f_i(x)\}$ sorozatban az $f_{n_{i-1}}(x)$ függvény után álló függvény, hogy minden $r > n_i$-re

$$\int_a^b [f_{n_i}(x) - f_r(x)]^2 dx < p_i^3 ;$$

az $f_{n_1}(x)$ függvényt tetszésszerint választjuk, pl. $f_{n_1}(x) = f_1(x)$. Megmutatjuk, hogy az így értelmezett $\{f_{n_i}(x)\}$ sorozat *általában összetartó*. Legyen $i > 1$; akkor azon $x$ értékek halmazának, melyekre $|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| > p_i$, a mértéke $< p_i$; azon értékek halmazának, melyekre $|f_{n_{i+2}} - f_{n_{i+1}}| > p_{i+1}$, a mértéke $< p_{i+1}$, s í. t. Ennélfogva, ha $\mathfrak{M}_i$ azon $x$ értékek összességét jelenti, melyekre egyáltalán van olyan $j > 0$, $k > 0$, hogy

$$| f_{n_{i+k}}(x) - f_{n_{i+j}}(x) | > \sum_{h=i}^{\infty} p_h ,$$

úgy az $\mathfrak{M}_i$ halmaz mértéke $< \sum_{h=i}^{\infty} p_h$. Vagyis bármilyen kicsiny pozitiv számok is $\varepsilon$ és $\sigma$, megadható olyan $i$, hogy azon $x$ helyek halmazának, melyekre van olyan $j > 0$, $k > 0$, hogy $| f_{n_{i+k}}(x) - f_{n_{i+j}}(x) | > \varepsilon$, a mértéke $< \sigma$. Ennélfogva azon $x$ helyek $\mathfrak{M}_\varepsilon$ halmaza, melyekre

$$\overline{\lim_{j=\infty,\, k=\infty}} | f_{n_k}(x) - f_{n_j}(x) | \geqq \varepsilon ,$$

0-mértékű. Jelentse $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ a pozitiv számoknak egy 0-hoz tartó sorozatát, akkor minden olyan $x$ érték, melyre az $\{f_i(x)\}$ sorozat nem összetartó, az $\mathfrak{M}_{\varepsilon_i}$ 0-mértékű halmazok valamelyikéhez tartozik. Vagyis tényleg a mindezen helyeket összefoglaló halmaz is 0-mértékű. Más szóval: az $\{f_{n_i}(x)\}$ sorozat — legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével — tényleg összetartó.

*Riesz Frigyes.*

# ADALÉKOK AZ ÜVEGRÁCSON ELHAJLÍTOTT FÉNY POLÁROSSÁGÁNAK ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

## Előszó.

Körülbelül négy éve már annak, hogy a fényelhajlás jelenségeivel közelebbről megismerkedni alkalmam volt, midőn Fröhlich egyetemi tanár úr vezetése alatt a gyertyafüstben lebegő ultramikroszkópos részecskéken történő fényelhajlásra vonatkozó méréseket végeztem. Annak a felismerése, hogy a kicsiny részecskéken történő fényelhajlást mint a Stokes-féle «elemi hullámokra való bomlás» fizikai megvalósítását lehet értelmezni, már jó ideje rávezetett az üvegrácson való elhajlás alább kifejtendő felfogására. De csak a 3. §-ban említendő, 1909 nyarán végzett egyszerű kisérletek adtak impulzust arra, hogy e felfogást mathematikai alakba önteni s a tapasztalattal összevetni megkisértsem. Ezen elméleti próbálkozás eredményei teszik e dolgozat tartalmának tőlem eredő részét. A mellett elkerülhetetlennek látszott az idevágó ismereteket rövid áttekintésben összefoglalni, a mit az 1. és 2. §-ban tettem meg. Egyébként felesleges lenne itt a tartalom részletezésébe belemenni; az egyes §-ok czímeivel s az összefoglalással igyekeztem az áttekintést megkönnyíteni.

Legyen szabad azonban e helyen is őszinte köszönetet mondanom Fröhlich Izidor egyetemi tanár úrnak szíves és hathatós támogatásáért, a melyben részesített. Neki köszönhetem azokat az 5. és 6. §-ban feldolgozott eleddig még nem publikált adatokat, a melyeket Kronstein Béla és Kronberger Ede középiskolai tanár urak az ő vezetése alatt végzett mérésekben nyertek, neki köszönhetem a kisérleteimnél használt Jamin-féle polározó kör s több értékes üveg-præparatum át-

engedését. Nem kevésbbé vagyok hálás alkalomadtán adott értékes útmutatásaiért és buzditásáért.

Hasonlóképen élénk érdeklődésben és buzdításban volt részem munkám folyamán KLUPATHY JENŐ egyetemi tanár úr részéről is. Az ő támogatásának, az oldala mellett töltött évek tapasztalatainak köszönhetem fizikus voltomat; lehetetlen ez első szerény munkám bemutatása alkalmával erről is a hála és köszönet hangján meg nem emlékeznem.

## I. RÉSZ.

**1. §.** Kisérlet és elmélet állása FRÖHLICH vizsgálatai előtt. Fényelhajlás homogén közeg belsejében; STOKES törvénye; EXNER kisérletei. A fényszóródás; RAYLEIGH elmélete. Üvegrácson történő fényelhajlás; STOKES felfogása a megtörve elhajlított fényt illetőleg.

Az üvegrácsokon elhajlított fény polározásbeli viszonyai idestova már egy évszázad óta foglalkoztatják a fizikusokat. Természetes tehát, hogy mielőtt tulajdonképeni tárgyunkra térhetnénk, legalább nagyjában meg kell ismerkednünk az eddigi vizsgálatok eredményével. Miután FRŐHLICH I. *Polarisation des gebeugten Lichtes* (Teubner 1907)[1] cz. alapvető munkájában az idevágó irodalom teljes ismertetése is megtalálható, ennek a nyomán fogok kitérni a czélunk szabta kereten belül annak a tárgyalására, hogyan állott a szóban forgó jelenségek kisérleti és elméleti ismerete a FRŐHLICH-féle vizsgálatok előtt.

Maga a szóban forgó jelenség, az üvegrácsokon való fényelhajlás sokkal ismeretesebb, semhogy leírásánál hosszasan kellene időznünk. Ha rácsozott üvegfelületre fénysugarat ejtünk, a szabályosan visszavert és megtört fényen kivül még egyéb, elhajlított fénysugarak is fellépnek. Ezekkel az elhajlított sugarakkal foglalkoznak az ismertetendő vizsgálatok a czélból, hogy a kisérleti megismerés útján eljussanak oly formulákhoz,

[1] Együttal különlenyomat a «Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn» XXII. kötetéből.

a melyek tetszésszerinti elhajlított sugár minőségét (intensitását s főleg polározási állapotát) a beeső fény minőségével és a rács anyagának optikai sajátságaival meghatározzák.

Megjegyzendő, hogy az üvegrácson való elhajlás egyúttal a közeg lényeges változásával jár, ellentétben a közönséges például kicsiny nyílásokon történő fényelhajlással, a mely egyetlen homogén közegben — rendesen levegőben — játszódik le. Természetesen ez utóbbi az egyszerűbb jelenség s ezért czélszerűnek látszik ennek az ismertetését és pedig — a fejlődés menetének megfelelően — először az elméletének ismertetését bocsájtani előre. A mi tárgyalásaink szempontjából a *homogén közegben* történő fényelhajlás különösen azért fontos, mert ebből, mint primær jelenségből fogjuk a *két közeg határfelületén* történő elhajlást is összerakni; oly eljárás ez, a mely szintén STOKEStől, az egész elmélet atyjától származik.

Hogy képzeteinket határozott tárgyhoz köthessük, gondoljunk a fényelhajlás létrehozásának azon legegyszerűbb módjára, midőn az egyébként homogén közegben (pl. levegőben) a fény útjába kicsiny nyílással ellátott átlátszatlan ernyőt helyezünk el. A fényelméletből ismeretes,[1] hogy a tér tetszőleges pontjában előálló fényvektor oly integrál alakjában állítható elő, mely a nyílás kerületén átfektetett tetszésszerinti felületre terjesztendő ki s a melynek argumentumában a fényvektornak s normálismenti differencziálhányadosának felületi értékei szerepelnek. Magát az integrálelemet az illető felületelemtől származó *elemi gerjedésnek* tekinthetjük, ennek a meghatározását tartalmazza a STOKES-féle elmélet.[2]

Legyen (1. ábra) az $XOY$ sik az elhajlitó felület, rá merőlegesen az $OZ$ tengely mentén essék be a $ZOY$ síkban polá-

[1] V. ö. pl. DRUDE: Lehrb. d. Optik. 2. kiadás, 169. l.

[2] Azt hihetnők, hogy a HUYGHENS-elvnek KIRCHHOFF-POISSON-féle szigorú ogalmazása ezt természetszerűleg megadja. Tényleg azonban ez az integrál nem alkalmas az elhajlitott fény polározási viszonyainak leírására. Ennek bizonyítását lásd FRŐHLICH i. m. 119—125. l.

rozott (tehát az $OX$ tengely mentén rezgő) fénysugár. Legyen az $O$ pontban és $t$ időben a kirezgés

$$\xi = a \sin \frac{2\pi}{\lambda} bt,$$

akkor Stokes szerint tetszőleges $\overrightarrow{OR}$ irányban haladó sugárra nézve, a mely a beeső fény rezgésirányával $\sphericalangle XOR = \alpha$, az átmenő fény irányával $\sphericalangle NOR = \omega$ szöget zár be, az $O$-ban lévő $df$ felületelemtől $\overline{OR} = r$ távolságban és $t$ időben létrehozott kirezgés

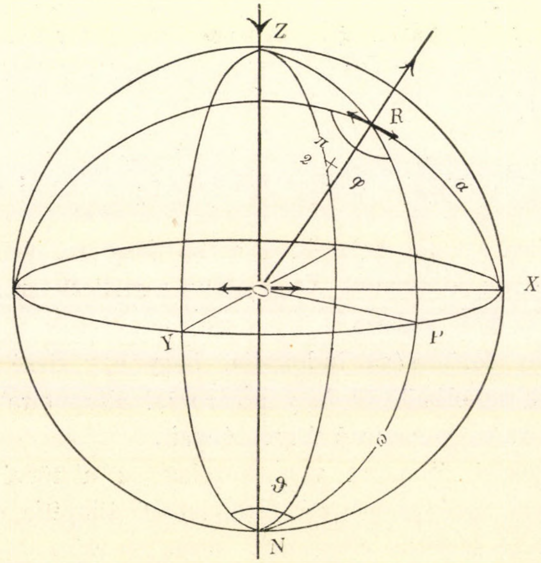
$$\xi' = \frac{adf}{2\lambda r}(1+\cos\omega)\sin\alpha\cos\frac{2\pi}{\lambda}(bt-r);$$

irányra nézve pedig beleesik a beeső fény rezgésirányán és az $\overline{OR}$ sugáron átfektetett $XOR$ síkba, a mellett természetesen merőleges az $\overline{OR}$ sugárra.

A törvény fontossága indokolja, hogy egy kissé bővebben részletezzük az elhajlitott fény polározási állapotára és intensitás-viszonyaira vonatkozó folyományait.

A polározási állapotra vonatkozólag ez a törvény azt a rendkívül egyszerű geometriai elrendezést állapítja meg, mely szerint tetszésszerinti elhajlitott sugár a rajta és a beeső sugár rezgési irányán átfektetett síkban rezeg. Ha a beeső sugár rezgési irányához, mint tengelyhez a meridiánok és parallelkörök rendszerét vesszük fel, akkor e törvényt így is kifejezhetjük: Bármely elhajlitott sugár rezgési iránya érintője a rajta átmenő meridiánkörnek, polározási iránya érintője a rajta átmenő parallelkörnek. A polározás-síkok, ill. irányok ilyen elrendezését Fröhlich után *circumaxiálisnak* fogjuk nevezni.

Az intensitás-eloszlás nem mutat ilyen egyszerű tengelykörüli szimmetriát, értelmezése azonban ilyenekre vezethető vissza. Nevezetesen: ha az $(1+\cos\omega)$ tényezőtől először eltekintünk, a $\sin\alpha$ faktort úgy értelmezhetjük, hogy a fényhullámok tranzverzálitásánál fogva a beeső gerjesztő rezgésnek mindig csak az elhajlitott sugár irányára merőleges összetevője jő számba, tehát például magának a rezgésnek irányában zérus az elhajlított fény intensitása. Az ($1+\cos\omega$) tényezővel pedig a beeső sugár *iránya* jelentkezik oly módon, hogy az elhajlított fény annál gyöngébb, minél nagyobb az elhajlás szöge $\omega$, például negyedakkora az átmenő fényre merőlegesen, mint közvetlen szomszédságában.[1]




1. ábra.

Most még arról kell szólnunk, hogyan győződünk meg adott esetben arról, vajjon fennáll-e a polározási síkok e circumaxiális elrendezése. E végből meg kell állapitanunk a lemérhető adatok közt a circumaxiálitás esetén érvényes összefüggést. Gondoljuk, hogy a fényelhajlító præparatum egy polározó kör közepén van elhelyezve s reprezentálja, (1. ábra), a *ZRN* elhajlási sík az eszköz főkörét, melynek mentén a megfigyelő cső körülvihető. A megfigyelő cső $\overrightarrow{ON}$ helyzetében mérjük le az átmenő fénynek, $\overrightarrow{OR}$ helyzetében az elhajlított fénynek e

[1] Szem előtt tartandó, hogy itt mindig csak a gerjedés-elemről van szó s nem egy véges nagyságú nyilás hatásáról.

síkra vonatkozó polározási azimutját $\vartheta$ és $\varphi$-t s az elhajlás szögét $\sphericalangle NOR = \omega$-t. Mind e három szög alkotó része a $RSN$ derékszögű gömbháromszögnek[1] és pedig:

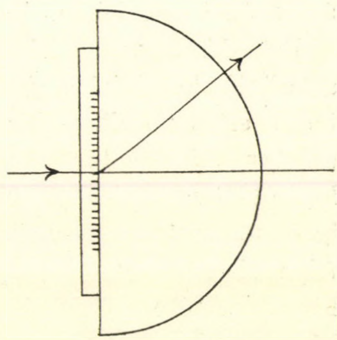
$$\sphericalangle RNS = \vartheta, \quad \widehat{RN} = \omega; \quad \sphericalangle NRS = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

(az $ROX$ sík az elhajlított sugár *rezgési* síkja lévén); a közöttük fennálló

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \vartheta \, . \cos \omega \qquad (1)$$

összefüggés fejezi ki tehát a circumaxiális polározás törvényét.

Maga STOKES a homogén közegben történő fényelhajlásra vonatkozó megfigyeléseket nem is végzett,[2] úgy hogy e törvénynek első szigorú kisérleti ellenőrzése tulajdonképen EXNER-től származik, a ki először létesített fényelhajlást (közelítőleg) homogén közegbe ágyazott üvegrács segélyével. E végből úgy járt el, hogy az üveglemezt rácsozott lapjával befelé (lásd a 2. ábrát) félhengerlencse síklapjára ragasztotta egy csepp olaj közvetítésével, a melynek törésmutatója a rács és a henger törésmutatójával közel egyenlő volt.[3] A 45° azimut alatt polározott fény merőlegesen esett az üveglemezre s a rácson elhajlított fény normálisan, tehát irány- és polárosság-változás nélkül lépve ki a lencséből, a megfigyelő csőbe jutott. A mérések a STOKES törvénynyel jól egyező polározási azimutokat adtak; elhamarkodott dolog lenne azonban ebből az *egy* ráccsal végzett *egyetlen* mérési sorozatból a STOKES-törvény érvé-



2. ábra.

[1] Az ábráról kimaradt $S$ az $\widehat{XR}$ és $\widehat{YZ}$ körök metszéspontja.

[2] A fényszóródásról lásd alább.

[3] A törésmutatók nem lehetnek pontosan egyenlők, mert akkor a közeg homogenitása sehol nem lévén megzavarva, nincsen fényelhajlás.

nyességére véglegesen következtetni. Mégis, hogy egészen a legújabb Fröhlich-féle vizsgálatokig ilyen szűk keretben mozgó quantitativ adatok mellett a Stokes-törvény, mint a homogén közegben történő fénygerjedés elemi törvénye — hogy úgy mondjam — a fizikusok köztudatában élt, az egy más analog jelenségcsoport, a kicsiny részecskéken történő fényelhajlás ismeretének tulajdonítandó.

Ha a fényelhajlás elemi törvényéről egyáltalán lehet szólani, aminthogy legalább a polározási állapotok illetőleg bizonyára lehet[1] s a Stokes-törvény valóban ezt tartalmazza, akkor némi joggal várhatjuk a circumaxiális polározást annál a fényelhajlásnál (fényszóródásnál), a melyet valamely homogén közegbe ágyazott, benne lebegő igen kicsiny részecskék okoznak.

Ez a Tyndall-tünemény néven ismeretes jelenség, a mely a kolloid-oldatok vizsgálatában újabban oly nagy jelentőségre tett szert (ultramikroszkóp), minden zavaros közegen, kolloid-oldaton előállitható; például igen jól az alkénsavas natron híg oldatán, a melyet hígitott kénsav hozzáadására kiváló, igen finom kénrészecskékkel zavarossá tettünk. Ha erre a folyadékra konvergens napfény-nyalábot ejtünk, a fény útja a kénrészecskéken történő elhajlított fény révén megvilágított kúp alakjában láthatóvá lesz. Ha az elhajlító részecskék igen kicsinyek, még a fény hullámhosszához képest is, akkor ez az elhajlított fény a következő már Stokes és Tyndall által felismert sajátságokat mutatja.[2]

*α)* Ha a beeső fény *síkban poláros*, az elhajlitott fény intensitása zérus a polárosság síkjának normálisa mentén, azaz ebből az irányból nem látni (vagy csak igen gyengén) a fénykúpot.

*β)* Ha a beeső fény *természetes*, akkor a beesés irányára

---

[1] V. ö. erre vonatkozólag Fröhlich i. m. 123—124. l.

[2] L. Fröhlich i. m. és újabb értekezését: «A circumaxiális polározás törvényének általános érvényessége egyenletes fénytörésű közegek belsejében». Math. és Term. Tud. Értesitő XXVII. 299. 1909.

merőleges síkban elhajlitott minden sugár teljesen polározva van (vagy majdnem teljesen) a hozzá tartozó elhajlási síkban, minden más sugár pedig partiálisan ugyancsak a mindenkori elhajlás síkjában s partiális polárossága annál erősebb, minél közelebb jár az említett síkhoz.

Rögtön belátjuk, hogy az *α)* alatt említett sajátság a circumaxiális elrendezés egy fő ismertető jele; a *β)* alatt említettek pedig amannak közvetlen folyományai. Valóban, úgy az (1) képletből, mint a circumaxialitás geometriai értelmezéséből (l. 5. l.) közvetlen következik, hogy a beesés irányára merőleges síkban elhajlított fény mindig e síkban van polározva, függetlenül a beeső fény polározási azimutjától, tehát természetes beeső fény esetén is. Ennélfogva a kicsiny részecskéken elhajlitott fény polárossági viszonyai STOKES törvényével tényleg leírhatók. (Tévedés volna azonban ezt egészen magától értetődőnek tartani; éppen fordítva: a tapasztalat bizonyítja, hogy ezek a jelenségek az elemi gerjedést teszik megfigyelhetővé.)

E jelenségek tulajdonképeni elmélete azonban LORD RAYLEIGH-től származik, a ki ezeket elektromágneses alapon tárgyalja. Megoldja nevezetesen azt a problémát, milyen elektromágneses sugárzás indul ki a környezetétől eltérő dielektromos állandójú kicsiny gömbből, ha reá lineárisan polározott *elektromos* síkhullám esik. A hullámhosszhoz képest kicsiny gömb esetén az eredmény rendkívül egyszerű: A gömbből kiinduló hullámok elektromos erői meridionális,[1] a rájuk merőleges mágnesi erők circumaxiális rendszert alkotnak, mindkettőnek tengelye a gerjesztő *elektromos erő iránya*, a mely körül az intenzitás is szimmetrikusan van elosztva, azaz az egész hullámrendszer olyan, mint a milyen egy lineárisan rezgő elektromozott gömbből (elektronból) vagy egy HERTZ-féle oszcillátorból származik.

Könnyű belatni, hogy a fényvektort a szokásos módon az elektromos erővel azonosítva s a poláros fény rezgés-irányára nézve a FRESNEL-féle felfogással élve ez az eredmény a *polá-*

[1] Azaz az elektromos erő a mindenkori meridiánsíkban fekszik.

*rosság irányainak circumaxiális* elrendezését állapítja meg. Az ilyen rendszert FRÖHLICH után *egyszerű circumaxiális*nak fogjuk nevezni, ez származik a STOKES-féléből, ha az $(1+\cos\vartheta)$ tényező helyett 1-et írunk. Talán helyénvaló lesz itt felemlíteni, hogy azok az egész sugárrendszerre kiterjedt első quantitativ megfigyelések, melyeknek egy kis részét a FRÖHLICH-féle vizsgálatok folyamán e sorok írójának végeznie alkalma volt,[1] ezt a circumaxiális eloszlást nagy pontossággal fennállónak mutatták. Az *intensitás-eloszlásra* vonatkozólag azonban legyen szabad megjegyeznem, hogy ebben az említett egyszerű tengelykörüli szimmetria nem található fel, legalább is azokban a meglehetősen különböző esetekben nem, a melyeket eddig megfigyeltem. Az intensitás-eloszlást illetőleg különben az irodalomban is egészen eltérő nézeteket találhatni; hogy csak két példát említsek, SIEDENTOPF[2] a rubinüveg ultramikroszkópos aranyrészecskéin elhajlított fény intenzitását STOKES fentebb idézett ú. n. cosinus-törvénye szerint valónak veszi fel, míg LAUE[3] az egyenletes intenzitás-elosztást használja fel annak a bizonyítására, hogy a fénynek kicsiny részecskéken történő szétszóródása irreversibilis folyamat. Azonban erről a kérdésről — behatóbb vizsgálatok hiányában — bajos volna véleményt koczkáztatni.

Ezzel egyúttal a homogén közeg belsejében előálló fényelhajlás ismertetését be is fejeztük, áttérünk most a két közeg határfelületén, azaz a tulajdonképeni üvegrácson történő fényelhajlás tárgyalására.

Jegyezzük meg első sorban a következőkre való tekintettel, hogy az erre vonatkozó vizsgálatokat rendszerint olyan kisérleti berendezéssel végezték, a milyet a rácsszínkép előállítására is szokás használni, kiegészítvén a közönséges spektrometert a polározási viszonyok megállapítására szolgáló optikai

[1] L. FRÖHLICH idézett akadémiai értekezése 359. lapját.

[2] Dr. Ann. 10. 1. 1903.

[3] Thermodynamische Betrachtungen über die Beugung der Strahlung. Ber. d. deutsch. phys. Ges. 1909. Heft 20. 467.

műszerekkel, NICOL féle hasábokkal a beeső és elhajlított fény útjában, esetleg BABINET-féle kompenzátorral. (Polározó kör.) Világos, hogy ilyen berendezésnél a megfigyelő távcső objektiv-fókuszsíkjának *egy* pontjában vagy a megfigyelő szem retinájának *egy* pontjában a *különböző rácsközöktől ugyanazon irányban* kiinduló elemi hullámok találkoznak; ha tehát az analysáló nicol egy bizonyos helyzeténél a fókuszsík valamely pontja elsötétedik, ez azt jelenti, hogy az illető ponthoz tartozó irányban kiinduló elemi hullámok polározási síkja merőleges a nicol keresztmetszetének hosszabbik átlójára. Ezek a megállapítások esetleg feleslegeseknek látszanak, miután azonban nekem eleinte némi nehézséget okozott ilyesféle kérdések tisztázása: mi az tulajdonképen, a mit megfigyelünk; mi az, a mit az elmélet megad; mi a vonatkozás a kettő között; azért szükségesnek tartottam ezeket a megállapításokat kezdettől fogva lehető pontosan végezni. A fentieket más szóval úgy is kifejezhetjük, hogy ilyen berendezéssel a *résnek* a különböző irányokba elhajlított fényben előálló *képét* figyeljük meg. Ennyit a megfigyelés módjáról.

A megfigyelések eredményeivel szinte hamarább végezhetünk. Ezekben a FRÖHLICH-féle vizsgálatok előtt igen nagy rendezettlenséget találunk.[1] Egyik oka ennek az, hogy a szokásos berendezésnél a rácsozás iránya a beesés síkjára mindig merőleges lévén, mindig csak egyetlen síkban, a beesés síkjában elhajlított fényt vizsgálták. Ebből azonban a fennálló törvényszerűségeket felismerni — most már bátran mondhatjuk — szinte lehetetlen. Mindamellett ezekben a régebbi megfigyelésekben is csirájában már megtalálható az isogonális polározásnak (STOKES) és a circumaxiális polározásnak (FRÖHLICH, RÉTHY, GLAZEBROOK) törvényszerűsége. Azonban nem volna értelme ezeket a most meglévőkhöz képest oly szűkkörű kisérleti tapasztalatokat ismertetni. Az elmélet dolga sem állott

[1] L. F. POCKELS összefoglaló referatumát WINKELMANN: Handb. d. Phys. 2. kiadás, 1906. $VI_1$ kötetje 1113. l.

jobban, a szűkkörű tapasztalatokat meglehetősen eltérő elméletek egyformán jól adták vissza, mint a hogy egy égitest három közelfekvő helyzetén ép úgy lehet elliptikus, mint parabolikus pályát átfektetni.

Mindezekből tehát csak STOKES elméletét, ill. elméleti felfogását fogom felemlíteni. Ő t. i. a határfelületen történő fényelhajlást a törés (ill. visszaverődés) általánosabb esete gyanánt fogja fel.

Legyen $\alpha_i$ a beeső fény polározási azimutja, $\alpha_r$ a szabályosan visszavert (ill. megtört) fény polározási azimutja, akkor ezek között a

$$\operatorname{tg} \alpha_r = m \operatorname{tg} \alpha_i$$

összefüggés áll fenn, a hol $m$ a beesés szögétől s az üveg törésmutatójától függő állandót jelent, melynek (a törés és visszaverődés esetére különböző) értéke FRESNEL ismeretes formuláiból közvetlenül adódik. Már most STOKES ugyanilyen alakú

$$\operatorname{tg} \varphi = m' \operatorname{tg} \vartheta \qquad (2)$$

összefüggést tételez fel [1] a *beeső* és *elhajlított* fény polározási azimutjai $\vartheta$ és $\varphi$ között is, a hol az egy bizonyos beeső és elhajlított sugárhoz tartozó $m$ értéke nézete szerint legczélszerűbben kisérletileg volna meghatározandó. STOKES közöl is egynehány mérési sorozatot, a melyekből kitűnik, hogy a (2) képlet jól visszaadja *egyazon* elhajlított sugár polárossága azimutjának változását a beeső fény polározási azimutjával; természetes azonban, hogy addig, a míg az $m'$ tényezőt a beeső fény meghatározó adataiból s a rács adataiból kiszámítani nem tudjuk, nem mondhatjuk, hogy az elmélet birtokában vagyunk.

---

[1] Ez a képlet igen egyszerű kinematikai értelmezést enged meg. E szerint ugyanis, ha ugyanazt a beeső és elhajlított sugarat tartva meg, a beeső sugár polározási azimutját 0°-tól 360°-ig változtatjuk úgy, hogy a beeső fényvektor végpontja egy kört ír le, azalatt az elhajlított fényvektor végpontja oly ellipszisen mozog, melyben $m$ a két főtengely viszonya.

A mi már most STOKES említett felfogásának pontos körvonalozását illeti, a *megtörve* elhajlított fény keletkezését úgy képzeli, hogy a beeső fény a határfelületre érkezés előtt «elemi hullámokra bomlik» s ezek azután szabályos törést szenvednek. Ezen «*irreguláris törés*» feltevése alapján kiszámítja a megtörve elhajlított fény azimutjait s azokat az ő — aránylag kevés — mérési adatával egyezőnek találja.

A visszaverődve-elhajlított fény létrejöttét analog «*irreguláris visszaverődés*» folyamatának tulajdonítja. Hogy azonban a visszaverődve-elhajlított fény — általában — nem jöhet létre a rácsozás előtt történő elhajlás és szabályos visszaverődés útján, a hogy a STOKES-féle irreguláris visszaverődést képzelnünk kell, azt FRÖHLICH kétségbevonhatatlanul bebizonyította. Bebizonyította azt is, hogy általánosságban az irreguláris törés feltevése is tarthatatlan.

Ki fogjuk azonban mutatni — s ez lesz dolgozatunk tulajdonképeni eredménye — hogy egy közelfekvő általánosítással a STOKES-féle felfogás mind a megtörve, mind a visszaverődve-elhajlított fény jelenségeinek leírására alkalmassá tehető.

E czélból azonban szükségünk van FRÖHLICH vizsgálatainak áttekintő ismeretére, mint a kitől a szóban forgó jelenségek teljes kisérleti leírása, törvényszerűségük megállapítása és első elméleti értelmezése származik.

2. §. A FRÖHLICH-féle vizsgálatok ismertetése. Kisérleti berendezés, a megfigyelések kiterjesztése az egész térre. A visszaverődve elhajlított fényvektor-rendszer két főtypusa: a circumaxiális és az isogonális rendszer; előállításuk egyszerű rezgő centrumokkal.

A FRÖHLICH-féle vizsgálatok ismertetésénél is, hogy a szokásos méreteket túl ne lépjem, azt a szempontot fogom irányadónak tekinteni, hogy csak annyit mondjak el, a mennyi a továbbiak megértésére és megitélésére szükségesnek látszik. Ebből a szempontból talán kevésbbé, de a 12. lapon mondottak alapján mégis indokoltnak látszik, hogy röviden a megfigyelés módjára is kitérek. Ez t. i. valamennyi addig használttól eltért annyiban, hogy benne a polarizáló és analyzáló hasábokon kívül semmi más optikai elem nem volt alkalmazva. A heliostatról visszaverődő napfény a goniométer fix csövébe illesztett polározó prizmán, majd egy kicsiny 1 mm. átmérőjű környiláson át esett a goniométer középpontjában elhelyezett s minden irányban forgató rácsra. Az itt elhajlított sugarak aztán a megfigyelőcsövön és ennek okulár-végébe helyezett ugyancsak ca. 1 mm. átmérőjű diafragmán át direkt a megfigyelő szemébe jutottak. Hogy ha ennél a berendezésnél a kisérletező — mint rendesen — a belépő diafragmának az elhajlított fényben létrejövő képére akkomodál, akkor a szem retinájának *egy* pontjában a *különböző rácsközöktől* igen kevéssé *különböző irányokban* kiinduló elemi hullámok találkoznak. Az említett méretek mutatják azonban, hogy ez az iránykülönbség teljesen elhanyagolható. Elhanyagolható még akkor is, ha magára a rácsfelületre akkomodálunk, a mi olyan igen ritka (0·5 mm. közű) rácsozásnál, a melyen az egyes vonalak szabad szemmel is megkülönböztethetők, magamon tett tapasztalat szerint esetleg önkéntelenül is bekövetkezhet. Ebben az esetben a retina *egy* pontjában az *egy* rácsköztől *különböző* (bár igen kevéssé különböző) irányokban kiinduló elemi hullámok találkoznak, azaz a mit megfigyelünk, az a *rácsnak* az elhajlított fényben létrejövő *képe.* Véleményem szerint a megfigyelésnek ez a módja, a mikor tehát a különböző rácsközöktől eredő elemi hullámok nem jutnak interferentiára, felel meg legjobban az elméleti leírás azon módjának, a melyet e jelenségekre alkalmazni szokás, t. i. az elemi gerjedéssel való értelmezésnek.[1] Természetesen a megfigyelő szem távolításával ez a megfigyelési mód egész folytonosan megy át a másikba, mikor t. i. a fényforrás képére akkomodálunk. Viszont azonban kis távolság és nagynyilású leképezés esetén ettől lénye-

[1] A kicsiny részecskéken való elhajlást is így figyeljük meg, magára az elhajlító részecskére nézünk. Viszont bizonyos jelenségekre (lásd az 47. lapot) ez a megfigyelési mód egyáltalán nem alkalmas.

gesen különbözik. (Ultramikroskóp.) Végül még jegyezzük meg, hogy ezek a meggondolások főleg ott tartandók szem előtt, a hol az elhajlított fény természete az iránynyal gyorsan változik. Ilyen különleges esettel a 7. §-ban fogunk közelebbről megismerkedni.

A közbeeső optikai elemek elhagyásán kívül egy másik, döntő jelentőségű módosítása FRÖHLICHnek az, hogy ő megfigyeléseit az egész $4\pi$ nyilásszöget betöltő elhajlított sugárrendszerre kiterjeszti, a mely *egyetlen*, azaz: *egy* bizonyos meghatározott irányú és polárosságú beeső párhuzamos sugárnyalábból az elhajlító felület *egy* bizonyos irányításánál előállítható. T. i. a rács egy adott helyzetében előálló elhajlított sugarak mind egy bizonyos felület mentén haladnak s a régebbi megfigyelések mind csupán *egy* ilyen felületre szorítkoztak, a mikor ez éppen összeesett a beesés síkjával. Ha azonban a rácsot saját síkjában 180 vagy éppen 360°-al körülforgatjuk, a közben a tér minden iránya egyszer, ill. kétszer e felületbe belejut, minden irányban kapunk tehát elhajlított sugarat.

Most még csak néhány szót arról az eljárásról, a melyet FRÖHLICH a kisérleti eredmények szemléletes előállítására alkalmazott, a melyet tulajdonképen már mi is használtunk.

Gondoljunk el a rácsra eső fény talppontja körül mint középpont körül egy gömbfelületet, akkor ennek minden pontját egy-egy elhajlított sugár döfi át. Ha már most a gömbfelület minden pontján a rajta kilépő sugár polározási irányában egy vonalelemet huzunk, tehát úgy hogy a sugáron s a hozzátartozó vonalelemen átfektetett sík az illető sugár polározási síkja legyen, akkor a gömbfelületet egy görberendszer fogja behálozni, a mely a szóban forgó elhajlított fény-rendszer polározási állapotának hű képét adja. Ennek a görberendszernek s a gömbfelületen a szükséghez képest elhelyezett koordinátarendszernek ábrázolására pedig FRÖHLICH a stereografikus vetítést használja. A bővebb részletezést akkorra hagyom, a mikor ezt a leképezést mi is használni fogjuk, most pedig áttérek a FRÖHLICH-féle vizsgálatok eredményeinek áttekintésére.

A szóban forgó jelenségek ismeretében alapvető jelentőségű az az elsősorban említendő eredménye, mely szerint *az elhajlított fény polározási állapota független a rácsozás közétől.* Ez a megállapitás oly quantitativ mérésekből adódott ki, a melyek ugyanazon üveganyagra húzott 0·5 mm. és 0·00116 mm. közű rácsozásra vonatkoztak.[1] Szinte felesleges ennek a ténynek a jelentőségét hangsúlyozni. Ez tulajdonképen azt mondja ki, hogy ha az üveg-felület folytonosságát akármi módon megzavarjuk, a discontinuitás helyéről mindig ugyanolyan polározási állapotú elhajlított fény indul ki; ez a tény teszi lehetővé az elméleti leírásnak már említett és később használandó módját.

A továbbiakban most már csak az üvegrácson *visszaverődve* elhajlított fényre vonatkozó, quantitativ megfigyeléseken nyugvó eredmények tárgyalására szorítkozom, azaz ama fényvektorrendszerekre, a melyek a levegőből az üveg határfelületére eső fényből visszaverődéses elhajlással keletkeznek s a levegőben haladnak tovább.

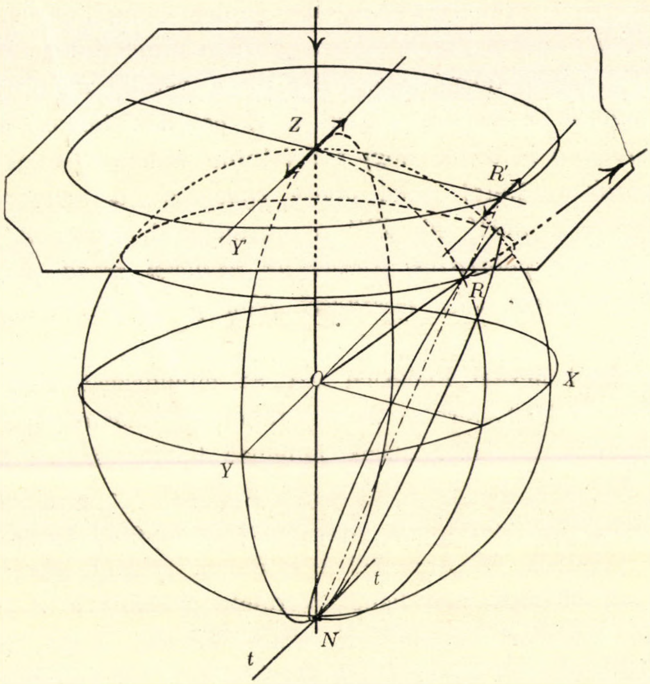
Ezek a rendszerek a mérések tanusága szerint két főtypus alá sorolhatók: a *circumaxiális* és az *isogonális* rendszer typusa alá.

A *circumaxiális rendszert* már ismertettem; oly vektorrendszer ez, melyben az említett módon ábrázolt polározási irányok a gömbnek egy bizonyos tengelyhez tartozó parallel köreinek, a rezgési irányok pedig ugyanezen tengelyen átmenő meridiánköröknek érintői.

Ez a typus legtisztábban jelentkezik, ha a fény az üveg polározás-szöge alatt (ca. 56°) esik be s polárosságának síkja merőleges a beesés síkjára. Ez esetben a szabályosan visszavert fény intenzitása zérus s ez a zérus intenzitású sugár (ill. ennek az iránya) a tengelye a circumaxiális rendszernek. Ugyanilyen typusú rendszerek jönnek létre mind a beesés szögének, mind

[1] Érdemes megemlíteni, hogy ez az utóbbi, a legsűrűbb rács, melyet valaha üvegre készitettek. Jedlik osztógépével készült.

a polárosság síkjának elég tetemes változtatásánál is mindaddig, míg a beesés iránya a normális incidentiához vagy a polárosság síkja a beesés síkjához közel nem jut, a mikor is az elhajlított fényvektor-rendszer az *isogonális* elrendezés felé közeledik.




3. ábra.

Az *isogonális rendszer* ismertetését legczélszerűbb lesz azon az eseten végezni, a mikor ez a legtisztábban jelentkezik, t. i. a merőleges beesés esetén.

Legyen (3. ábra) az $XOY$ sík a rács síkja, $\overrightarrow{ZO}$ a beeső fény iránya; $ZOY$ a polárosság síkja, a visszaverődve elhajlított sugarak pedig az $XOY$ sík felett lévő teljes félteret betöltik. Az *isogonális* elrendezés értelmében tetszésszerinti $\overrightarrow{OR}$ elhajlított sugár polározási irányát, ill. síkját a következő módon kapjuk meg: A $Z$-vel ellenlábas $\bar{N}$ ponton át huzzunk a gömbhöz oly $t$ érintőt, a mely a $ZOY$ síkban fekszik. Ha már most a $t$ érintőn és az $R$ ponton át síkot fektetünk, akkor annak a körnek, a melyben ez a gömbfelületet metszi, az $R$ ponthoz tartozó érintője lesz az $\overrightarrow{OR}$ sugár polározási iránya; az $\overrightarrow{OR}$ sugáron és ez érintőn átmenő sík a polározás síkja. Hogy ez elrendezésnek szabályszerűségeibe jobban belepillanthassunk, ábrázoljuk az egész gömböt stereografikus projectióban. Válaszszuk — szinte természetszerűleg — a vetület szempontjául az $N$ pontot, a vetítés síkjául a $Z$ ponthoz tartozó érintősíkot. Rögtön belátjuk, hogy a $t$ érintőn átmenő összes említett körök vetületei mind *olyan egyenesek, a melyek párhuzamosak* a $ZOY$ sík $ZY'$ nyomvonalával, azaz: *az elhajlított sugarak polározási irányának vetületei mind párhuzamosak a (beeső ill.) visszavert fény polározási irányának vetületével.*

Ez okból nevezi FRÖHLICH ezt az elrendezést kissé más körülmények közt stereografikus-parallel polározásnak. Az *isogonális* név a rendszer másik jellemző tulajdonságára vonatkozik. Ugyanis, ha — a tájékozás kedvéért — a gömbön a $\overline{ZON}$ tengelyre vonatkozó meridiánok és parallel körök rendszerét veszszük fel s ezeket a vetületen szintén ábrázoljuk, akkor az említett meridiánok vetülete gyanánt a $Z$ ponton átmenő sugársort kapunk. S ekkor kiderül, hogy egyazon meridiánban, azaz *egyazon elhajlási síkban fekvő valamennyi sugár polározási irányának vetülete e síkkal egyenlő szöget zár be és pedig ugyanakkorát, mint a visszavert sugár polározási iránya ugyanezen síkkal.* A vetület *szögtartó* lévén, ugyanez áll magán *a gömbön fekvő irányokra* is [csakhogy ott nem oly könnyű e törvényszerűséget felismerni] ennek a tulajdonságnak köszöni a rendszer az isogonális nevet.

Helyénvalónak látszik itt megemlíteni, hogy a most említett tulajdonság az isogonális polározás kisérleti felismerését is rendkívül egyszerűvé teszi. Azok a sugarak ugyanis, a melyek a megfigyelő csőbe jutnak, mialatt az a goniométer főkörén körüljár, természetesen mind ugyanabban a síkban vannak elhajlítva,[1] polározási irányaik tehát az isogonalitás értelmében e síkkal ugyanazon szöget zárják be, mint maga a visszavert fény, azaz: *ha az analysatort a visszavert fény kioltására állítjuk be, kioltva kell maradnia valamennyi elhajlított sugárnak, a melyet csak a főkör körüljárásánál megfigyelhetünk* s ennek így kell lenni akármilyen is az azimutja a beeső fénynek.

Mint már említettem, az isogonális polározás legtisztábban jelentkezik normális beesés esetén, a mikor — természetesen — a polározás azimutja tetszőleges lehet. Ebben az esetben a megközelítés foka oly nagy, hogy a Fröhlich közölte rajzon[2] az isogonálitástól való eltérést szabad szemmel alig lehet észrevenni. (Csak mellékesen említem, hogy a circumaxiális elrendezés a visszaverődve elhajlított fényben közel se áll fenn ily nagy közelítésben, még az említett legkedvezőbb esetben sem.) A normális incidentia esetén kívül minden *más beesési szögnél* is isogonális polározás lép fel nagy közelítésben, *ha a beeső fény a beesés síkjában van polározva.* A megközelítés foka még 80°-os beesésnél is elég nagy, tetemesen nagyobb, mint a circumaxiálitásé a megfelelő általánosabb esetekben. Azonban nem czélunk a részletekbe belemenni; így csak éppen utalok arra, a mit Fröhlich[3] említ az isogonális polározás régibb megfigyelésére és felismerésére vonatkozólag (Stokes, Exner) s most rátérek Fröhlich elméleti tárgyalásainak áttekintésére. Előre kell bocsájtanom, hogy ezek az elméleti kifejtések a szóban forgó jelenségeknek csupán *elméleti értelmezését* (theoretische Deutung) czélozzák. E végből Fröhlich megmutatja, hogyan lehet rezgési, gerjedési czentrumokat szerkeszteni, a melyek olyan polározás-állapotú hullámokat emittálnak, a milyeneket a rácson elhajlított fényvektor-

---

[1] F síkok a beeső sugarat tartalmazván, egyúttal meridiánsíkok, mint a *ZRN* sík.

[2] l. c. 317. l.

[3] l. c. 93. l. és 139. l.

rendszerek mutatnak. Ezen fejtegetéseket a fénynek mind rugalmasságtani, mind elektromágneses elméletében keresztül viszi.

### A) *A circumaxiális polározás előállítása.*

Ennek a tárgyalásával hamar végezhetünk. Említettem már (a 10. lapon), hogy *az elektromágneses fényelmélet szerint* — a *fényvektort* az *elektromos erővel* azonosítva — circumaxiális polározást mutatnak azok a fényhullámok, a melyek egy, a környezetétől eltérő dielektromos állandójú kicsiny gömbből indulnak ki, ha az — a reá eső elektromos hullám hatása alatt — lineárisan oscilláló elektromos polározási állapotba jut. Az elektron-elmélet szerint még egyszerűbben, egy lineárisan rezgő elektronnal állíthatjuk elő a circumaxiális hullámrendszert.

Hasonlókép a *rugalmassági fényelmélet* szerint — a fényvektort a lineáris elongátióval azonosítva — circumaxiális polározást mutatnak azok a fényhullámok, a melyek egy a közegbe ágyazott kicsiny merev gömb lineáris oscillátiója folytán belőle kiindulnak.

Többször említett álláspontunknál fogva a circumaxiális polározás elméletével kapcsolatban csupán említeni akarom Stokes, Réthy, Glazebrook, Rayleigh és Voigt nevét, a nélkül, hogy munkásságukat és eredményeiket kellő világításba helyezni megkisérteném, ugyancsak Rowlandét az isogonális polározás elméletével kapcsolatban.

### B) *Az isogonális polározás előállítása.*

Az isogonális rendszernek előállítására Fröhlich kétféle utat is követ, itt csupán a Rowlandtól származót ismertetjük, a melyre a nagyobb súlyt fekteti.

Az előállításnak ez a módja annak a felismerésén nyugszik, hogy az isogonális rendszer egy *egyszerű circumaxiális* és egy *reá merőleges tengelyű egyszerű meridionális* rendszerből rakható össze.[1] Már most *az elektromágneses fényelmélet* szerint *meridionális polározást* mutatnak azok a fényhullámok, a melyek egy, a környezetétől eltérő mágneses állandójú kicsiny gömbből indulnak ki, ha az — a reá eső mágneses hullám hatása alatt — lineáris oscilláló mágneses polározási állapotba jut. Az elektron-elmélet szerint ugyanezt az eredményt még egyszerűbben, egy forgó oscillálást végző elektronnal állíthatjuk elő.

E szerint az isogonális polározás előállhat, ha a fénynek mind elektromos, mind mágneses vektora gerjesztőleg hat a környezetétől eltérő dielektromos és mágneses állandójú kicsiny gömbön.[2]

Hasonlókép a *rugalmassági fényelmélet* szerint meridionális polározást mutatnak azok a fényhullámok, a melyek egy, a közegbe ágyazott kicsiny merev gömb rotátiós oscillátiója folytán kiindulnak.

E szerint az isogonális polározás előállhat, ha a fénynek mind translatiós, mind rotátiós vektora gerjesztőleg hat.

*Selényi Pál.*

---

[1] Egyszerű meridionális az a vektorrendszer, melyben a vektorok a meridiánok mentén fekszenek, az amplitudó pedig arányos a pólus-távolság sinusával.

[2] Megjegyzendő, hogy az eredő-rendszer csak akkor lesz az isogonális, ha a két összetevő-rendszer energiája egyenlő.

# A DRÓTNÉLKÜLI TELEGRAF ALKALMAZÁSA A PONTOS IDŐ JELZÉSÉRE.

Az idő pénz, mondja az angol és amerikai; és valóban ott, a hol a munkaalkalmak száma korlátlan, igaznak is kell tartanunk ezt a mondást. Nálunk legtöbbször nem igen becsülik meg az időt, a minek okát abban találom, hogy nincsen jó időmérő eszközünk, óráink egész Magyarországban pontatlanok. Engedjék meg, hogy néhány példára hivatkozzam Legnagyobb pályaudvarunknál a nyugati pályaudvarnál előfordul, hogy az óra egyik nap 5 perczet késik, majd pedig egy másik napon 7 perczczel siet, a mi 12 perczes, kereken $^1/_4$ órás különbség. Csak ezer környékbeli nyaraló utast számítva, naponkint 1000 negyedóra vész így el s egy nyáron (80 napon) át körülbelül 20.000 korona a veszteség, ha a nyaraló idejének hatvan perczét egy koronával értékeljük. Budapest egész lakosságának a pontatlan időjelzés miatt elpocsékolt ideje pedig több millió koronára rughat.

A vidéken még rosszabbak a viszonyok, például egyes nagyobb áramfogyasztó gyárak és a villamos világítási, erőátviteli vállalatok közt napirenden vannak a surlódások az árammérő berendezéseknek nappali (erőátviteli) és esti (világítási) árra való átkapcsolása miatt. Azt, hogy például esti 6 óra van-e, legtöbb helyen 5—8 percz különbséggel tudják csak meghatározni.

Egyes fürdőhelyeken pedig, a hol a vasut messzebb fekszik, egész szokásos, hogy elutazás előtt Budapesttől telefonon kérdik meg a pontos időt.

A bajokon való segítség elég egyszerűnek látszik, pénzügyileg azonban meglehetős nehéz dolog. Például a magyar királyi államvasutak vehetnék kezükbe a dolgot; s azt hiszem meg is tennék, ha épen napjainkban nem volna a vasutüzletnek annyiféle száz más baja, hogy a mellett az időnek $\pm 5$ perczczel pontosabb vagy pontatlanabb jelzése egészen eltörpül. Megtehetné a posta is, hogy a hivatalokban a közönség részére pontos órákat szerez be s azokat rendben is tartatja; számitásom szerint az összes postahivatalokra mintegy fél millióba kerülne a dolog, a mit egy intézettől közczélokra akkor, a midőn személyzetének fizetése még rendezetlen, igazán nem lehet kivánni.

Hátra volna a harmadik módszer, hogy mindegyik város és község maga-magán segitsen. A megoldás elég egyszerű is, ha az összes nyilvános (városházi, templomtornyi, intézeti stb.) órákat úgy állitjuk be, hogy azok naponkint siessenek; a jobb óráknál néhány másodperczet, a rosszabbaknál talán még 1 perczes napi sietést is megengedhetnénk. Ha most gondoskodnánk arról, hogy 12 óra előtt például öt perczczel a *12 ős számnál* valami peczek kiugorjon s *pont 12-kor* ismét visszatolódjék, akkor az összes órák naponkint pontosan be lennének igazítva s az egyes órák közti többperczes időkülönbözetek nem volnának lehetségesek. A peczeknek kiugrását maga az óraszerkezet végezné, bevonását pedig valamely drótnélküli adó-állomás által kibocsátott jel folytán az óraállomás vevőkörének jelfogója eszközölné. Ha Budapesten állitanánk föl a drótnélküli jeladó állomást s az adókört úgy méreteznénk, hogy legkeletibb városunk Brassó még jól vehesse a jelet, akkor nemcsak Magyarországra, de az egész osztrák-magyar birodalomra is meg volna oldva a pontos idő jelzésének kérdése. Ha Budapest—Brassó távolságával Budapest központból kört húzunk, akkor majdnem az összes határszéli városok a körön belül feküsznek. Tarnopol, Lemberg, Krakkó, Karlsbad, Kufstein stb. mind jól vehetnék a jelet, legfeljebb Innsbruck és Cattaro nem kapná a jeladást. Valamivel erősebb, több kilowattos adó-állomásnál azonban még ezek is beállíthatók volnának. Csak magyar szempontból tekintve a dolgot, talán jobb lenne a jeladó állomást Mezőtúron vagy Szarvason, azaz a szorosan vett Magyarország középpontjában felállítani; általánosabb irányból nézve az ügyet azonban csak Budapest jöhet szóba. Első sorban is Budapesten a drótnélküli jeladó állomás a meteorologiai és földmágnességi intézet útján igen kényelmesen szerezhetné be a pontos időt. Igaz ugyan, hogy ezt Szarvas is megkaphatná, akár drótnélküli telegraf segélyével is Páristól, Hamburgtól vagy esetleg Pólától, Budapestet azonban a birodalmi központul másodsorban az jelöli ki, hogy a hadsereg úgyis tervbe vette a budapesti drótnélküli telegraf-állomás felállitását s így a berendezés magára a városra semmi költséggel sem járna. Viszont a hadsereg is nézetem szerint szivesen megtenné, hogy vállalkozna a naponkénti jeladásra. Hiszen egészen a hadsereg érdeke az, hogy az országban minél több drótnélküli vevő-állomás létesüljön, a mit a hadsereg háborús időben vagy nagygyakorlatokon tetszése szerint felhasználhat hadi czélokra s e mellett az állomásoknak sem *felépítéséről,* sem *üzembentartásáról* gondoskodnia nem kell. Ezen a czimen még a tervezett nagyszebeni második állomást is megtakaríthatná s az erre szánt összeget inkább a drótnélküli telegraf másirányú intenzivebb kifejlesztésére fordíthatná, például a kis távolságokra ható, de lovon hordozható előörsi drótnélküli telegraf-készülékek kiképzésére.

Budapesten a jeladó állomásul nézetem szerint legjobban megfelelne a jánoshegyi Erzsébet-kilátó-torony, a melynél talán még nem lenne késő az antenna árbocz felállításáról való gondoskodás. Azt hiszem a Jánoshegyről egészen jól lehetne levelezni a szomszédos országok fővárosaival; Berlin, Varsó, Bukarest, Sofia, Belgrad, Cettinje, Róma városokkal kissé pontosabb beállítással még jól menne a jelvevés.

Az eddigiek szerint a központi adó-állomás tulajdonképen senkinek sem kerülne külön költségébe, mégis biztosítva lenne. Hátra volna annak kifejtése, hogy mikép volnának létrehozandók a vevő-állomások. Tulajdonképen ezek is készen vannak, legalább is nyolcztized részben. Tudomásom szerint már néhány évvel ezelőtt a Károly Irén-féle kohereres vevőkészülékből 130 darab kelt el az országban, azóta bizonyosan lesz már 150 darab is használatban az egyes iskolai gyűjteményekben. Véleményem szerint mindezeket a készülékeket fel lehetne használni a vevő-állomásoknál, e szerint tehát csak az antennák megépitése és a vevőkörnek valamely meghatározott hullámhosszra való beállitása volna hátra. Sőt talán még a templomtornyok villámháritóit is lehetne alkalmazni; mindez természetesen olyan kérdés, a mely külön vizsgálódást igényel. A manapság épülő, vagy nem rég épült díszesebb városházak tornyain az antenna felszerelése az épület egyéb költségeihez képest úgyis olyan csekély, hogy számba sem jöhet. Megjegyzem, hogy manapság 20 méteres, tehát közönséges emeletes lakóház magasságú antennával is már 200 kilométerre lehet drótnélküli jelzéseket adni, 60 méteres antenna megfelelő energiával pedig 3000 kilométerre is még jól működik. A vevőkör beállítását néhány órai tanulmányozás alapján akármelyik középiskolai fizikai tanár is elvégzi s így azt hiszem ebben az irányban sem lenne semmiféle akadály sem. Sajnálom, hogy a Telefongyár részvénytársaságnak Gizella-úti telepén tervezett s szerelés alatt levő drótnélküli *telefon*állomása a mai napig nem készült el, mindjárt gyakorlatilag is bemutathattam volna a hullámfogás egyszerű voltát. Az órák automatikus igazítását, a mely még leginkább kerülne pénzbe (igaz, hogy csak néhány koronába), eleinte el lehetne tekinteni s megelégedhetnének, ha a vevőkörbe csatolt csengő csengéssel jelezné a tizenkét órát, a csengetés után kézzel volnának igazíthatók a többi órák.

Tekintetbe kell vennünk azonban azt is, hogy nálunk a telegrafia állami monopoliumot képez. Egyik ügyvéd ismerősöm okfejtése szerint a telegrafia jelek adására és vevésére szorítkozik. A vevő-állomásokon jelek adására épen az olcsóbb kivitel miatt úgysem rendezkednének be, táviratozásról tehát szó sem lehetne, sőt még jelek vevéséről sem, mert hiszen naponként csak *egy* hosszú jelet adna az adó- s csak *egy* hosszú jelet vennének a vevő-állomások. Ilyenformán tehát a monopoliumba egyáltalán nem ütköznék a dolog. A saját részemről mindazonáltal fontosnak tartanám a m. kir. posta közreműködését is. Hiszen a hullámhossz megállapítása már úgyis a posta hatáskörébe esik s a más államokban folytatott gyakorlat szerint a posta tevékeny részt is vesz az ily irányú munkálkodásban. A hullámhosszat vagy 1800 méterre kellene vennünk, mint a mostani Eiffel-torony-állomáson az rendszeresítve van, vagy pedig 2000 méterre, mint azt az újabb Eiffel-toronyállomásnál javasolják, a melynek berendezését 6000 kilométer távolságra hatónak tervezik.

Ha a vevő-állomásokat rosszul állítjuk be, vagy az olcsóbbság miatt igen alacsony antennákat alkalmazunk, akkor az adó-állomást kell erősebbre vennünk s így esetleg Berlinen és Rómán kívül még Konstantinápolyt s egyéb állomásokat is zavarhatunk. Ebben az esetben nemzetközi megállapodásokra volna szükség, a mi a tervezet kivitelét bonyolódottá teszi. Szerencsés véletlen folytán hasonló irányú megállapodások létrehozására szükséges nemzetközi bizottság összehívására már meg is történtek a kezdő lépések. Tissot a franczia hadi tengerészet sorhajóhadnagya ugyanis kisérleteket tett a hajón alkalmazott kronométereknek drótnélküli telegraffal való helyettesítésére, illetőleg a pontos időnek a hajók részére drótnélküli telegraffal való jelzésére. A kisérletek szerint az idő pontos jelzése már a kezdő próbálgatásoknál is fél másodperczynyi szabatossággal sikerült; minthogy azonban, különösen az atlanti oczeánon a különböző országok más és más jelzései zavart okozhatnak, nemzetközi megbeszélésre van szükség. A bizottság összehívása ügyében Tissot megindította a mozgalmat; azt hiszem, hogy a nemzetközi bizottságban a tengeri kérdéseken kívül a felmerülő szárazföldi jelzés kérdését is el lehet intézni. A Tissot által javasolt nemzetközi bizottság keresné ki azokat az olcsó vevő-állomásokat is, a melyek a legfontosabb igényeknek is megfelelnek. Ugyanis, ha az órajelzést a kereskedelmi hajókon (például az összes vitorlásokon, kis gőzösökön) is be akarjuk vezetni, a vevőkészülékeknek olcsóknak kell lenniök, el kell tudniok viselni a legdurvább bánásmódot is; szükséges, hogy fentartásuk, üzembe helyezésük minél kevesebb munkával és fogással járjon; fontos, hogy tanulatlan személyzet is hamar elsajátíthassa a kezelést; ilyen és több hasonló feltételek betartása kivánatos. Ha nálunk az országban már meglevő vevőkészülékek nem válnának be, akkor a bizottság által megállapitandó typus bizonyára meg fog felelni. A fentebb elmondottak alapján tehát az órajelzés bevezetésének semmiféle akadálya sincsen, annál kevésbbé sem, mert a Telefongyár r.-t. Gizella-úti telepén a Poulsen-féle adó-állomás úgyis rövid időn belül üzembe kerül s így a tisztelt Társaság tagjai a kisérleteket már a közel jövőben elkezdhetik s a beállitás eredményéről tapasztalataikat közölhetik.

Legyen szabad ezen alkalommal olyan iránypontok tárgyalására is áttérnem, a melyek nincsenek ugyan kapcsolatban a pontos idő jelzésével, de annál inkább a jelzések felvételére szolgáló vevő-állomásokkal. Ezeket az állomásokat be kell állitani a megadott hullámhosszra. A középiskola nyolczadik évfolyamai részére gyönyörű gyakorlat volna egy egy ilyen sikeres hullámfogás, a fizika legmodernebb alkalmazásán örömmel fáradoznának a tanulók s talán épen ez a gyakorlati kisérlet is hozzájárulna ahhoz, hogy későbbi korukban is érdeklődjenek a fizika és technikai kérdések iránt, a mit a mi középosztályunkról általában nem lehet elmondani.

Lehetne azonban a dolognak hadügyi szempontból is fontos alkalmazása. Ennek kifejtéseül legyen szabad megemlítenem, hogy a modern háborúnak egyik legnagyobb támadó fegyvere a telegraf. Az ellenség hadállásának, mozdulatainak, tervének kikémlése csak telegrafikus jelentések alapján lehet. A mely nemzetnek jobb a telegrafja, az győz s a háború már befejeződik a csaták megvivása előtt. Ilyen volt az utolsó szerb háborúnk, a hol az osztrák-magyar telegraf vér nélkül vívta ki a küzdelmet. Szerencsére telegrafhálózatunk olyan kiterjedt s jó karban tartott, hogy megállotta a próbát. Azonban más nemzetek is pótolják mulasztásaikat s mi is csak *akkor nem* maradunk el, ha kitartóan előre haladunk. Ilyen előrehaladási mozzanat volna az, ha intelligens fiatalságunkat a már mindinkább terjedő czélbalövésen kívül a telegrafiában is kiképeznők. Ha a budapesti adó-állomás a déli jelzésen kívül rövid közérdekű táviratokat is, például az időjárás prognózisát is leadná, mód lenne nyujtva a fiatalságnak a telegrafálás, különösen azonban a hallás utáni vétel elsajátítására. Ha pedig ehhez még mozgó telegrafállomásokkal, például sárkányos antennákkal is eszközöltetnének gyakorlatok, játékképen esetleg már az alsóbb tanfolyamok részére is, esetleg a kedv a külföldi (például párizsi, cliffoni stb.) telegrammok elfogására kitűzött díjakkal is emeltetnék, meg volnék győződve, hogy ifjuságunk mire hadi sorba kerülne, tökéletesen értené a dolgát s ilyképen az előörsi szolgálatnál olyan eredményeket érhetne el, melyeket ellenségünk esetleges nagy tömegeivel sem tudna ellensúlyozni.

Igen nagy örömömre szolgálna, ha javaslatom irányában a nagyrabecsült vendégek és a tekintetes társaság tagjai további lépéseket volnának hajlandók tenni.

*Gáti Béla.*

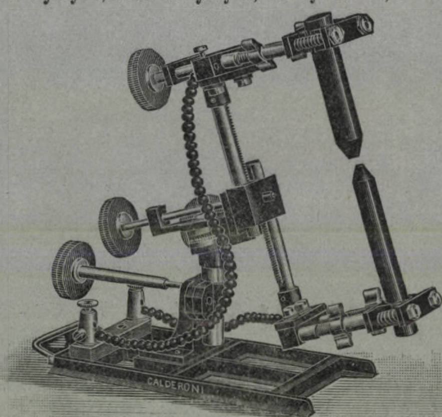
# Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

**Elektromos ívlámpa** legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—




**Elektromos ívlámpa** egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

**Borszesz-izzófénylámpa** légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

**Háromlábu asztalállvány,** mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110**.—

**Vetitési ernyő** finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

**Ernyő-állvány** fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30**.—

**Vetitési ernyők** zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

| | 200 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 cm. négyzetben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ára | **45**.— | **65**.— | **90**.— | **145**.— | **200**.— | **240**.— korona. |

**Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.**

*Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.*

Franklin-Társulat nyomdája

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENKILENCZEDIK ÉVFOLYAM

VI. FÜZET 1910 OKTÓBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1910.

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24–30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A tizenkilenczedik társulati év 1910 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János-utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6–6 korona.

*Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.*

**Rendes ülések.** A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2–3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

*Igen tisztelt munkatársainkat* értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kívánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

---

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

# TÉRBELI ALAKZATOK PROJEKTIVGEOMETRIAI ÁBRÁZOLÁSÁRÓL.

(Első közlemény.)

A térbeli alakzatok ábrázolására szolgáló MONGE-féle módszer lényegében két sugárpontnak (Strahlenbündel) egy síkra való kollineár leképezésén alapszik. E két sugárpont sugarai a két egymásra merőleges képsík normálisai. Ha minden sugárnak a reá merőleges képsíkkal való metszéspontja felel meg, akkor kollineár vonatkozásban van e két sugárpont a képsíkokkal. Ha pedig a két képsíkot a képtengely körül egybe forgatjuk, a két sugárpontnak egy síkra való kollineár leképezését nyerjük.

E leképezések folytán a két sugárpont közös síksorának — a képtengely normálsíkjainak — két kongruens sugársor felel meg, melyeknek megfelelő elemei egymást födik. E körülményből látjuk, hogy a MONGE-féle módszert, általánosabb ábrázolási módszerek egy speciális esetének tekinthetjük.

Jelen dolgozatomban bemutatni óhajtom, *miképen lehet két sugárpontnak egy képsíkra való kollineár leképezését, a maga teljes általánosságában, térbeli alakzatok ábrázolására felhasználni.* Egyben az összes lehetséges speciális esetekre is kívánok rámutatni.

A két sugárpont közös síksorának a képsíkban megfelelő sugársorok kölcsönös helyzete *általános* lehet; lehetnek azonban *perspektivek*, vagy *konczentrikusak*. Az utóbbi esetben az is lehetséges, hogy *kongruensek* és megfelelő sugaraik egymást födik.

A két sugársor különböző kölcsönös helyzeteinek, különböző ábrázoló módszerek felelnek meg. Ezek mindegyikével behatóan foglalkozom.

Látni fogjuk, hogy ezek a módszerek különösen két kollinear sugárpont képezte elsőrendű sugárkongruencziák és az azokban foglalt alakzatok, nevezetesen a másod-, harmad- és negyedrendű reguláris seregek és felületek ábrázolására alkalmasak. Egyúttal a harmadrendű térgörbék ábrázolására, tanulmányozására és a rájuk vonatkozó szerkesztések keresztülvitelére előnyösen felhasználhatók.

Az alkalmazások közül csak néhányat szándékozom felemlíteni, a nélkül azonban, hogy a konstruktiv kezelésbe mélyebben behatolnék.

## I. A térelemek ábrázolásáról általában.

### A) *A pont ábrázolása.*

1. Az ábrázolás czéljaira használjuk a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokat és a $\pi$ képsíkot (1. ábra). A két sugárpontot a képsíkra kollineár leképezzük. A $|C_1\ C_2| \equiv c$ közös sugaruknak a képsíkban egy $C_2$, vagy egy $C_1$ pont felel meg a szerínt, a mint $c$-t a $|C_1|$, vagy a $|C_2|$ sugárponthoz tartozónak tekintjük.[1] A

$$[c] \equiv [\alpha\beta\gamma\ldots]$$

közös síksornak az

$$|a'b'c'\ldots|, \text{ ill. } |a''b''c''\ldots|$$

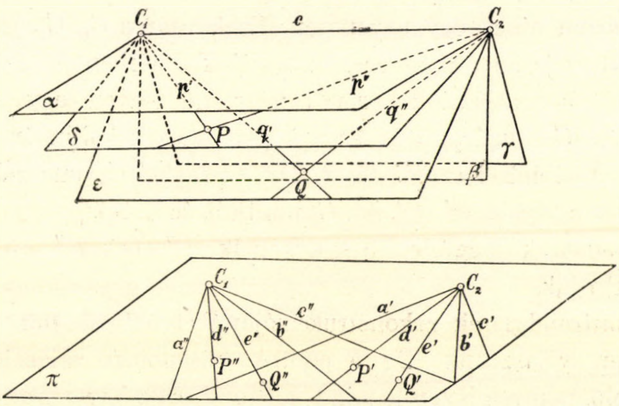
sugársor felel meg $\pi$-ben, a szerint, a mint a $[c]$ síksort a $|C_1|$, vagy a $|C_2|$ sugárponthoz tartozónak veszszük. A síksor természetesen a két sugársorral projektiv, azaz:

$$[\alpha\beta\gamma\ldots] \barwedge |a'b'c'\ldots| \barwedge |a''b''c''\ldots|.$$

2. A tér valamely $P$ pontján át a két sugárpont egy-egy

[1] Azt hiszem, nem szolgáltatok félreértésre okot, hogy a $c$ sugárnak a képsikban megfelelő pontjait $C_1$ és $C_2$-vel jelölöm, bár a sugárpontok középpontjainak a jelölésére is azokat a betűket használom. Mindenkor világosan fogjuk látni, melyik $C_1$, ill. $C_2$ pontról van szó.

sugara halad át. E $p'$, $p''$ sugaraknak megfelelő $P'$, $P''$ pontokat a $P$ pont *első* és *második képének* nevezzük (1. ábra). Minthogy a tér valamely $P$ pontja a $[c]$ síksor egy $\delta$ síkjában van, azért a képei az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c\ldots|$ projektiv sugársorok homológ, a $\delta$ síknak megfelelő $d'$, $d''$ sugarain vannak. És fordítva, ha $Q'$, $Q''$ az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c''\ldots|$ projektiv sugársorok bármely két megfelelő $e'$, $e''$ sugárain vannak, akkor a nekik megfelelő $q'$, $q''$ sugarak a $[c]$ síksor egy az $e'$, $e''$ sugaraknak megfelelő $\varepsilon$ síkjában vannak; ezek tehát egy $Q$ pontban metszik egymást, melynek képei $Q'$ $Q''$.




1. ábra.

Ebből következik: *Hogy a $P'$, $P''$ pontok egy térbeli $P$ pont képei legyenek, ahhoz szükséges és elegendő, hogy azok az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c''\ldots|$, projektiv sugársorok megfelelő sugárain legyenek rajta.*

3. Ilyen módon a tér pontjait általánosságban a két képükkel ábrázolhatjuk. Kivételt képeznek a $|C_1C_2| \equiv c$ sugár pontjai, melyeknek első képei a képsík $C_2$ és második képei a képsík $C_1$ pontja. Ezek a pontok tehát képeikkel nincsenek meghatározva.

Felemlítendő még, hogy a térbeli $C_1$ pont első és a térbeli $C_2$ pont második képe határozatlan.

4. Minden ábrázolásnál első sorban az $|a'b'c'\dots|$, $|a''b''c''\dots|$ projektiv sugársorokat kell ismernünk. Ezzel azonban a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokat és azoknak a képsíkhoz való kollineár vonatkozásait még nem ismerjük. És épen e körülményben van e módszerek projektiv-geometriai jelentősége. Ha ugyanis egy pontrendszert az itt megjelölt módon ábrázolunk, akkor nemcsak ezt, de vele együtt az összes ezzel kollineár pontrendszereket is ábrázoljuk.

Legyenek például $P'$, $P''$; $Q'$, $Q''$; $R'$, $R''$ a pontrendszer tetszőleges három, $P$, $Q$, $R$ pontjának a képei és tegyük fel, hogy a $P'$, $Q'$, $R'$, $C_2$, ill. a $P''$, $Q''$, $R''$, $C_1$ pontok közül bármely három nincs egy egyenesen. Ezek után a $C_1$, $C_2$, $P$, $Q$, $R$. pontokat teljesen önkényesen választjuk a térben és csak arra ügyelünk, hogy közülök bármely négy ne legyen egy síkban. A $|C_1|$ és $|C_2|$ sugárpontok és a képsík között kollineár vonatkozást létesítünk, ha a $|C_1P|$, $|C_1Q|$, $|C_1R|$, $|C_1C_2|$ sugarak megfelelőinek a képsík $P'$, $Q'$, $R'$, $C_2$ pontjait és a $|C_2P|$ $|C_2Q|$, $|C_2R|$, $|C_2C_1|$ sugarak megfelelőinek a képsík $P''$, $Q''$, $R''$, $C_1$ pontjait tekintjük.

A pontrendszerek rekonstrukcziójánál tehát öt pontot önkényesen választunk. De e pontok különböző választásának megfelelő pontrendszerek mind *kollineárisak*. Természetesen a MONGE-féle módszerrel ábrázolt alakzatok is végtelen sokféleképen rekonstruálhatók.

5. A képsík pontjai által a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokat is kollineár vonatkozásba hozzuk egymással. Valamely térbeli $P$ pont képei akkor és csak akkor esnek egybe, ha azon a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontok két megfelelő sugara halad át.

A tér eme pontjait *koinczidáló pontoknak* nevezzük.

*A koinczidáló pontok geometriai helye, eszerint, a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontok pontképződménye. És a koinczidáló pontok egybeeső képeinek geometriai helye az $|a'b'c'\dots|$, $|a''b''c''\dots|$ projektiv sugársorok pontképződménye.*

B) *Az egyenes ábrázolása.*

6. Valamely egyenes pontjainak első és második képei egy-egy $g'$, $g''$ egyenest alkotnak, melyeket az egyenes *első* és *második képének* nevezünk. Az egyenest a két képe általában meghatározza, mert ezeknek a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok egy-egy síkja felel meg, melyek egymást a kérdéses egyenesben metszik. Ha a $g'$, $g''$ képek az $|a'b'c' \ldots|$, $|a''b''c'' \ldots|$ projektiv sugársorok megfelelő sugarai, akkor nekik a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokban egy és ugyanaz a sík felel meg, s így a képek nem határozzák meg az egyenest. Ebben az esetben *az egyenest két pontjának a képeivel ábrázolhatjuk.*

A $g$ egyenes $A, B, C, \ldots$ pontjainak $A', B', C' \ldots$ és $A'', B'', C'' \ldots$ képei képezte pontsorok projektivek. E projektiv pontsorokat a $g'$, $g''$ képekből az $|a'b'c' \ldots|$, $|a''b''c'' \ldots$ projektiv sugársorok metszik ki.

7. Valamely $g$ egyenes $g'$, $g''$ képei akkor és csak akkor esnek egybe, ha az a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontok megfelelő síkjainak metszésvonala. Ilyen egyenest *koinczidáló egyenesnek* nevezünk.

*A koinczidáló egyenesek geometriai helye e szerint a* $|C_1|$, $|C_2|$ *kollineár sugárpontok képezte elsőrendű kongruenczia.*

A tér valamely $P$ pontján általában csak egy koinczidáló egyenes halad át. Ennek képei egybeesnek a pont képeit összekötő $|P'P''|$ egyenessel.

8. Valamely koinczidáló egyenes pontjainak képei közös tartóval biró két projektiv sugársort szolgáltatnak. Ha ez a projektivitás *involuczió*, akkor a koinczidáló egyenest *involutorikus*nak nevezzük.

Egy $P$ pont $P'$, $P''$ képei akkor és csak akkor egyuttal egy $Q$ pont $Q'$ $Q''$ képei, olyan formán, hogy

$$Q' \equiv P'', \quad Q'' \equiv P'$$

legyen, ha $P$ egy involutorikus egyenesen van.

A tér eme pontjait *involutorikus pontok*-nak és az egymáshoz rendelt $P$, $Q$ pontokat *involutorikus pontpár*-nak nevezzük.

Bármely involutorikus egyenes minden pontja involutorikus pont és az involutorikus egyenesek pontjai kettesével involutorikus pontpárokat alkotnak.

Valamely involutorikus egyenes képei vagy az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c''\ldots|$ projektiv sugársorok egy közös megfelelő sugara vagy pedig involuczióban metszik e sugársorokat.

C) *A sík ábrázolása.*

9. Valamely $\sigma$ sík pontjainak képei kollineár vonatkozásban vannak, mert a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok a $\sigma$ sík pontjai révén szintén kollineár vonatkozásban vannak.

*Ez a kollineáczió a $\sigma$ síkra jellemző és azért ezt a sík ábrázolására felhasználhatjuk.*

A képsík kollineácziói közül azonban csak azok ábrázolnak síkot, melyeknek összes megfelelő pontpárjai az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c''\ldots|$ projektiv sugársorok megfelelő sugaraira esnek, mert csak ebben az esetben ábrázolnak a kollineáczió megfelelő pontpárjai térbeli pontokat. Ez a feltétel azonban nemcsak szükséges, de elegendő is. Ebben az esetben ugyanis a képsík kollineácziója révén a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok is kollineár vonatkozásba lépnek, még pedig ezek perspektivek, mert e sugárpontokban a $[c]\equiv[\alpha\beta\gamma\ldots]$ közös síksor minden síkja önönmagának felel meg. A perspektiv helyzetből következik, hogy a két kollineár sugárpont megfelelő sugarai egy sík pontjaiban metszik egymást.

Az összes valamely síkot ábrázoló kollineácziókban a $P'\equiv C_2$, $P''\equiv C_1$ egymásnak megfelelő pontpár, mint a sík és a $|C_1C_2|\equiv c$ egyenes metszéspontjának a képei.

Ha a sík a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok egyikében van, akkor azt, az az egyenes ábrázolja, mely e síknak a megfelelő sugárpont a képsíkra való kollineár leképezése folytán megfelel.

D) *Transzformácziók.*

10. A $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokon kívül még egy harmadik, $|C_3|$, sugárpontot is felhasználhatunk az ábrázolásra, melyet szintén leképezünk a $\pi$ képsíkra. A térbeli $P$ ponton most a $|C_3|$ sugárpontnak egy $p'''$ sugara is halad át, melynek a képsík $P'''$ pontja felel meg. Ez a $P'''$ pont a $P$ pont *harmadik képe.*

A három sugárpont $C_1$, $C_2$, $C_3$ középpontjainak két-két képére lesz szükségünk. Legyenek ezek: $C_1''$, $C_1'''$; $C_2'$, $C_2'''$; $C_3'$, $C_3''$. Továbbá legyen

$$|C_1C_2| \equiv c_3, \quad |C_2C_3| \equiv c_1, \quad |C_3C_1| \equiv c_2,$$

és feleljenek meg a

$$[c_3] \equiv [\alpha_3\beta_3\gamma_3 \ldots], \quad [c_1] \equiv [\alpha_1\beta_1\gamma_1 \ldots], \quad [c_2] \equiv [\alpha_2\beta_2\gamma_2 \ldots]$$

síksoroknak a képsíkban a párosával projektiv

$$\begin{array}{lcl} |C_2'| \equiv |a_3'\, b_3'\, c_3' \ldots| & \text{és} & |C_1''| \equiv |a_3''\, b_3''\, c_3'' \ldots| \\ |C_3''| \equiv |a_1''\, b_1''\, c_1'' \ldots| & \text{és} & |C_2'''| \equiv |a_1'''b_1'''c_1''' \ldots| \\ |C_1'''| \equiv |a_2'''b_2'''c_2''' \ldots| & \text{és} & |C_3'| \equiv |a_2'\, b_2'\, c_2' \ldots| \end{array}$$

sugársorok.

A $C_1$, $C_2$, $C_3$ pontok említett képeit teljesen szabadon választhatjuk a képsíkban. De az említett három pár projektiv sugársor projektivitásának megállapitásánál szem előtt tartandó, hogy $C_1$, $C_2$, $C_3$ középpontok képei a megfelelő sugársorok homolog sugáraira essenek. Így essék pl:

$$\begin{array}{llll} C_3' & a_3'\text{-ra}, & C_3'' & a_3''\text{-ra}, \\ C_1'' & a_1''\text{-re}, & C_1''' & a_1'''\text{-re}, \\ C_2''' & a_2'''\text{-re}, & C_2' & a_2'\text{-re}. \end{array}$$

Valamely térbeli $P$ pont első és második, $P'$, $P''$ képei a $|C_2'|$, $|C_1''|$ projektiv sugársorok megfelelő sugaraira, pl: $b_3'$, $b_3''$ sugaraira esik. Ebből a $P$ pont harmadik, $P'''$ képét könnyen megszerkeszthetjük. Csak azt kell tekintetbe venni, hogy $P''$ és $P'''$ a $|C_3''|$, $|C_2'''|$, és épen így $P'$ és $P'''$ a $|C_3'|$, $|C_1'''|$ projektiv sugársorok megfelelő sugarain vannak. Tehát

$$P'' \text{ és } P''' \text{ rajta van } b_1'', \text{ ill. } b_1''' \text{ sugáron,}$$

míg

$$P' \text{ és } P''' \text{ rajta van } b_2', \text{ ill. } b_2''' \text{ sugáron.}$$

A $P$ pont harmadik képe tehát a $b_1'''$ és $b_2'''$ sugarak metszéspontja, melyek az említett projektiv kapcsolatoknak a felhasználásával könnyen megszerkeszthetők.

A pont transzformálása segítségével az egyenest és a síkot is könnyen transzformálhatjuk.

11. Eddigi vizsgálataink teljesen általánosak, a mennyiben az $|a'b'c' \ldots|$ és $|a''b''c'' \ldots|$ projektiv sugársorok kölcsönös helyzetére nézve semilyen megállapodás nem történt. Minden, a mit itt felemlítettünk, egyformán érvényes, akár általános helyzetben vannak e sugársorok, akár pedig perspektivek, vagy konczentrikusak. A továbbiakban ez esetek mindegyikével behatóan kivánok foglalkozni.

## II. Az ábrázolás különböző eseteinek részletes tárgyalása.

### E) *Első eset.*

12. Elsőnek azt az esetet tárgyaljuk, melyben az $|a'b'c' \ldots|$, $|a''b''c'' \ldots|$ projektiv sugársorok általános helyzetben vannak egymáshoz, úgy, hogy képződményük egy nem degenerált $k^2$ kúpszelet (2. ábra).

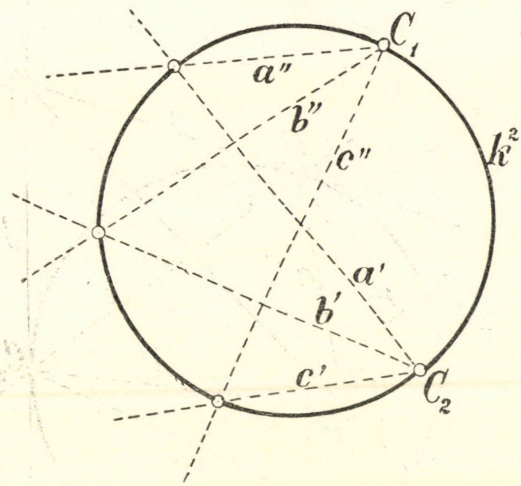
Ha a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokat a képsík pontjai révén kollineár vonatkozásba hozzuk, akkor ezeknek sem megfelelő közös sugaruk, sem közös megfelelő síkjuk nincsen. Ebből következik,[1] hogy a koinczidáló pontok geometriai helye (5) egy harmadrendű térgörbe $k^3$, melyet az ábrázolás *koinczidáló görbéjének* nevezünk. A koinczidáló egyenesek (7) a koinczidáló görbe húrjai. Ezeknek geometriai helye tehát egy elsőrendű és harmad osztályú kongruenczia $C$ (1, 3).

---

[1] Th. Reye: Die Geometrie der Lage II. Abteilung 191. old. (III. kiadás 1892.)

A koinczidáló görbe képei a $k^2$ kúpszelettel azonosak. A $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokat mindig olyanformán képezzük le a képsíkra, hogy $k^2$ kör legyen. Ez a konstruktiv kezelés szempontjából előnyös.

13. Bármely involutorikus egyenes képei átmennek a $|C_1C_2| \equiv a' \equiv b''$ egyenesnek a $k^2$ kúpszeletre vonatkozó harmonikus pó-



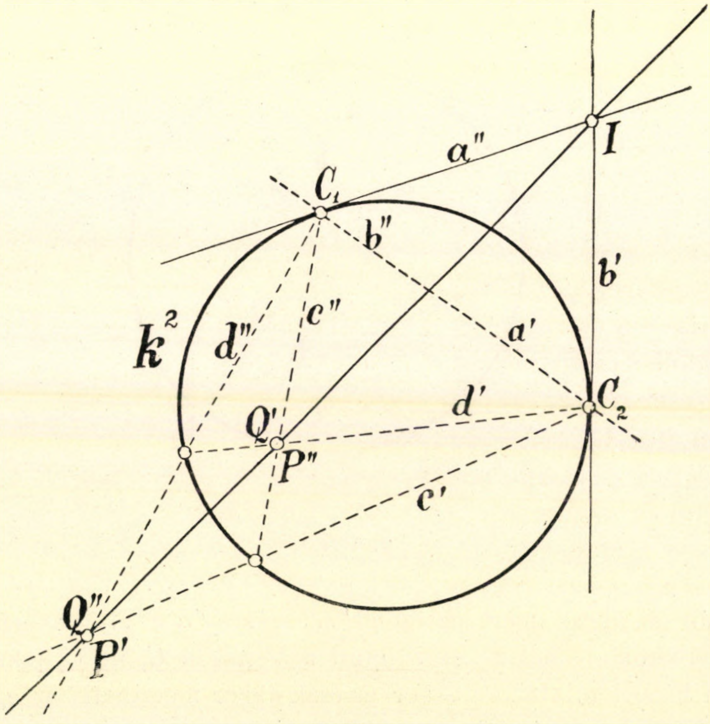

2. ábra.

lusán (3. ábra), mert az $|a'b'c' \ldots|$ és $|a''b''c'' \ldots|$ projektiv sugársorok — hol $a''$ és $b'$ most a $k^2$-nak a $C_1$ ill. $C_2$ pontjában húzott érintői — akkor és csak akkor metszhetik az egyenes képeit involuczióban.

Minthogy ez a feltétel nemcsak szükséges, de elégséges is, azért az involucziós egyenesek képei az $|I|$ sugársort alkotják.

Az $I$ pontnak a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokban egy-egy $u_1$, $u_2$ sugár felel meg, melyek kitérők, mert $I$ nincs rajta a $k^2$ kúpszeleten. Az $|I|$ sugársornak a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokban az $[u_1]$, $[u_2]$ projektiv síksorok felelnek meg, melyek egy másodrendű reguláris sereget képeznek. E reguláris sereg egyúttal az involutorikus egyenesek geometriai helye; azért ezt *involutorikus reguláris seregnek,* a neki megfelelő másodrendű felületet pedig *involutorikus felület*-nek nevezzük. Ez a felület egyúttal az involutorikus pontok geometriai helye.

A képsík pontjai között rokonságot létesitünk, ha bármely két konjugált involutorikus pont első képeit egymásnak megfelelőknek tekintjük ($P'$, $Q'$). Ez a rokonság az ismert *álta-*




3. ábra.

*lános inverzió* a $k^2$ kúpszeletre és az $I$ sorozó pólusra nézve. Minthogy a konjugált involutorikus pontok első képei konjugált harmonikus pólusok a $k^2$ kúpszeletre nézve, azért maga a $P$, $Q$ pontok is konjugált harmonikus pólusok a $k^3$ koinczidáló görbére nézve.

14. Mielőtt a sík ábrázolására áttérnék, meg kell jegyeznem, hogy a képsík $C_1$ pontjának a $|C_1|$ sugárpontban a $k^3$ koinczidáló görbének a $C_1$ pontjához tartozó érintője felel meg. Ha-

sonlót állíthatunk a $|C_2|$ sugárpont ama sugaráról, mely a képsík $C_2$ pontjának felel meg. Ez onnan következik, hogy a $|C_1C_2| \equiv c$ sugárnak a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontokban a $k^3$ koinczidáló görbe említett érintői felelnek meg.

15. A $k^3$ koinczidáló görbét bármely sík három pontban metszi. E pontok képei a síkot ábrázoló kollineáczió kettőspontjai. Két-két kettőspontot összekötő egyenesek adják a sík koinczidáló egyeneseinek a képeit.

A síkot ábrázoló kollineácziót kettőspontjaival is megadhatjuk. Negyedik megfelelő pontpár gyanánt azután a $P' \equiv C_2$, $P'' \equiv C_1$ szolgál. Ha e kettőspontok közül kettő képzetes, akkor a koinczidáló egyenesek közül szintén kettő képzetes. Ebben az esetben a síkot a valós koinczidáló pontjával és egyenesével ábrázolhatjuk.

Ha egy sík átmegy a $k^3$ $C_1$, vagy $C_2$ pontjához tartozó érintőjén, akkor neki a képsíkban egy a $C_1$, illetőleg $C_2$ pontján átmenő egyenes felel meg.

A $C_1$, $C_2$ pontokhoz tartozó simuló síkoknak a $k^2$ kúpszelet $C_1$, $C_2$ pontjaihoz tartozó érintői felelnek meg.

16. Az ábrázolás ez esetében könnyen végezhetünk speciális transzformácziókat. Ha ugyanis a $C_3$ középpontot a $k^3$ görbén veszszük fel, akkor a $|C_3|$ sugárpontot a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokkal oly módon hozhatjuk kollineár vonatkozásba, hogy bármelyik kettőjüknek képződménye a $k^3$ koinczidáló görbe legyen.[1] Ezután a $|C_3|$ sugárpontot a képsíkkal olyan formán hozzuk kollineár vonatkozásba, hogy a $|C_3|$ sugárpont bármely $p'''$ sugarának az a $P'''$ pont feleljen meg a képsíkban, mely a kollineár $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokban megfelelő $p'$, $p''$ sugaraknak is megfelel.

Ha most a $C_3$ czentrum és a $P$ pont $P'$, $P''$ képei adva vannak, a $P'''$ harmadik képet könnyen megszerkeszthetjük (4. ábra).

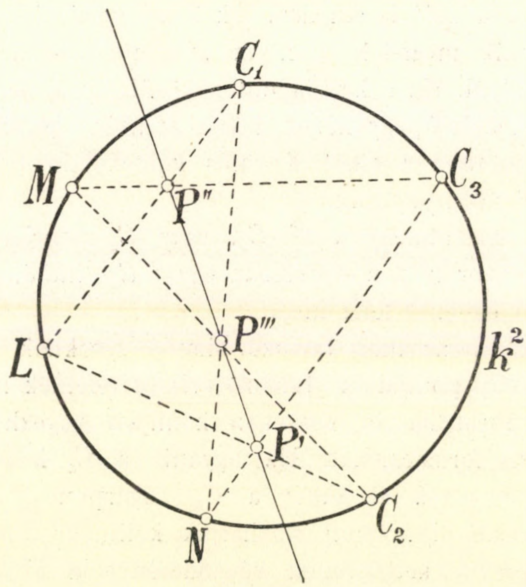
---

1 Reye i. m. II. Abt. 205. old.

A

$$|P' C_2| \text{ és } |P'' C_1|$$
$$|P'' C_3| \text{ és } |P''' C_2|$$
$$|P''' C_1| \text{ és } |P' C_3|$$

sugarak ugyanis párosával a $k^2$ kúpszelet egy-egy $L$, $M$, $N$ pontjában metszik egymást és a $|C_2M|$, $|C_1N|$ sugarak metszéspontja a kivánt $P'''$.




4. ábra.

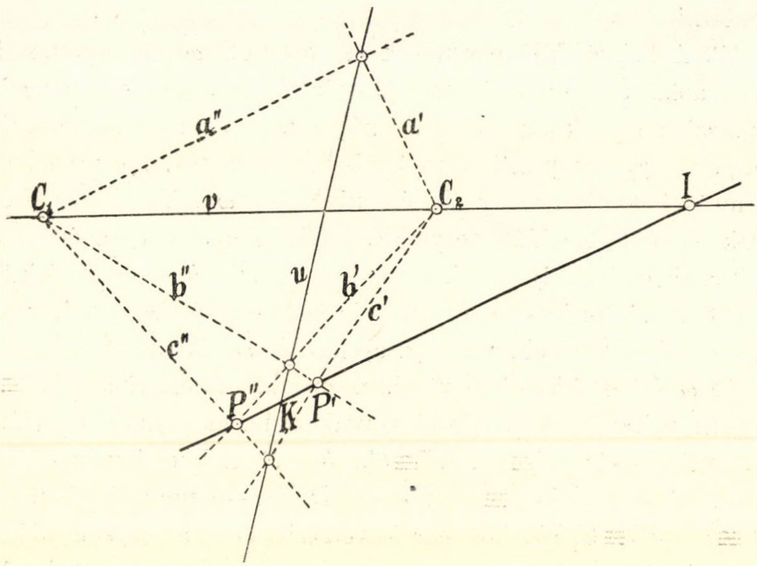
A Pascal-féle tételből következik, hogy a $P$ pont három képe egy egyenesen van, mert $P'$, $P''$, $P'''$ pontok a $k^2$ kúpszeletbe beírt $C_1LC_2MC_3N$ hatszög szembenfekvő oldalainak metszéspontjai.

Hogy valamely pont három képe egy egyenesen van, abból is következik, hogy bármely koinczidáló egyenes harmadik képe az első két képével egybeesik.

A továbbiakban a koinczidáló pontokat és egyeneseket és azok egybeeső képeit egy és ugyanazzal a betűvel fogjuk jelölni.

F) *Második eset.*[1]

17. Felteszszük most, hogy a képsík $C_1$, $C_2$ pontjai nem esnek egybe, de az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c''\ldots|$ projektiv sugársorok perspektivek (5. ábra).




5. ábra.

Ebben az esetben a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontoknak egy közös megfelelő $\omega$ síkjuk van, a nélkül azonban, hogy közös megfelelő sugaruk is volna.

Az $\omega$ síknak a képsíkban a $|C_1C_2| \equiv v$ *czentrális tengely* felel meg. Az $|a'b'c'\ldots|$ és $|a''b''c''\ldots|$ projektiv sugársorok megfelelő sugarai az *u perspektiv tengelyben* metszik egymást.

18. A koinczidáló pontok geometriai helye (5) egy az $\omega$ síkban fekvő $x^2$ kúpszeletből és egy azt egy pontban metsző, de nem az $\omega$ síkban fekvő $u$ egyenesből áll.[2] Az $x^2$ pontjainak

[1] Ez az ábrázolási eset lényegében megegyezik azzal, melyet «A két képsíkon való ábrázolás elméletéhez» czimű dolgozatom első részében ismertettem. Math. és Phys. Lapok XVIII. kötet, 29. oldal, 1909.

[2] REYE i. m. II. Abt. 190. old.

képei a $v$ czentrális tengely egy-egy pontjában esnek egybe, az $u$ egyenesei pedig, az $u$ perspektiv tengely egy egy pontjában. A $x^2$ kúpszeletet *koinczidáló kúpszeletnek*, a tér $u$ egyenesét pedig *koinczidáló tengelynek* fogjuk nevezni. Ezt az $u$ koinczidáló tengelyt az $u$ perspektiv tengelytől meg kell különböztetni.

19. A koinczidáló egyenesek (7) vagy az $\omega$ sík egyenesei, vagy amaz elsőrendű és másodosztályú $C(1, 2)$ kongruenczia sugarai, melynek sugarai a $x^2$ kúpszeletet és az $u$ koinczidáló tengelyt egy-egy pontban metszik. Egy egyenes, mely a $x^2$ és $u$ metszéspontján megy át és nincs az $\omega$ síkban, akkor és csak akkor koinczidáló egyenes, ha az illető egyenes és az $u$ koinczidáló tengely meghatározta sík a $x^2$ kúpszeletet érinti.

20. Involutorikus (8) egyenes is kétféle van. Azok t. i. vagy az $\omega$ síkban vannak, vagy nincsenek az $\omega$ síkban.

Az $\omega$ síkban fekvő involutorikus sugarak átmennek a $|C_1C_2| \equiv c$ egyenesnek a $x^2$ kúpszeletre vonatkozó harmonikus $C$ pólusán, melynek képei: $C' \equiv C_1$, $C'' \equiv C_2$. A szóban levő involutorikus egyenes és a $|C_1C_2| \equiv c$ egyenes $D$ metszéspontjáé ellenben $D' \equiv C_2$, $D'' \equiv C_1$. Ebből már következik, hogy az egyenes akkor és csak akkor lehet involutorikus, ha $C$ az egyenes pontja. Az $\omega$ sík involutorikus egyenesei tehát a $|C|$ sugársort képezik.

Ha valamely involutorikus egyenes nincs az $\omega$ síkban, akkor az illető involuczió kettőspontjai az illető egyenes egybeeső képeinek a $v$ czentrális tengelylyel és az $u$ perspektiv tengelylyel való $I$, $K$ metszéspontjai (5. ábra). E szerint az egyenes egy tetszőleges $P$ pontjának $P'$, $P''$ képei egymástól az $I$ és $K$ pontok által harmonikusan vannak elválasztva. De akkor $I$ az $u$ perspektiv tengelytől a képsík $C_1$, $C_2$ pontjai által harmonikusan van elválasztva.

Minthogy a képsík $I$ pontja, úgy a $x^2$ kúpszelet, mint az involutorikus egyenes egy pontjának az egybeeső képei, azért a nem az $\omega$ síkban fekvő involutorikus egyenesek egy $|I|$ sugársort képeznek, melynek $\sigma$ síkja a $x^2$ kúpszelet $I$ pontja és az $u$ koinczidáló tengelylyel van meghatározva.

21. Mind az $\omega$, mind a $\sigma$ sík valamennyi pontja involutorikus pont.

Ha $P$, $Q$ az $\omega$ sík egy involutorikus pontpárja, akkor ezek a $x^2$ kúpszeletre vonatkoztatott harmonikus pólusok. Minthogy $|PQ|$ a $C$ ponton átmegy, azért az összes konjugált involutorikus pontok egy általános inverzió megfelelő pontjai, melynek direktrix kúpszelete $x^2$ és sorozó pólusa $C$.

Ha pedig $P$, $Q$ a $\sigma$ sík egy involutorikus pontpárja, akkor ezek egymástól a $x^2$ kúpszelet $I$ pontja és a koinczidáló tengely által harmonikusan vannak elválasztva. A $\sigma$ sík involutorikus pontpárjai eszerint egy involuczió elempárjai, melynek czentruma $I$, tengelye $u$.

22. A síkot ábrazoló kollineáczió akkor és csak akkor czentrális, ha a sík a koinczidáló tengelyen átmegy. Ilyen sík a $x^2$ kúpszeletet két pontban metszi, melyek egyike a $x^2$ és $u$ közös pontja. A sík és a $x^2$ kúpszelet másik metszéspontjának egybeeső képei, a kollineáczió czentruma, és az $u$ perspektiv-tengely a kollineáczió tengelye.

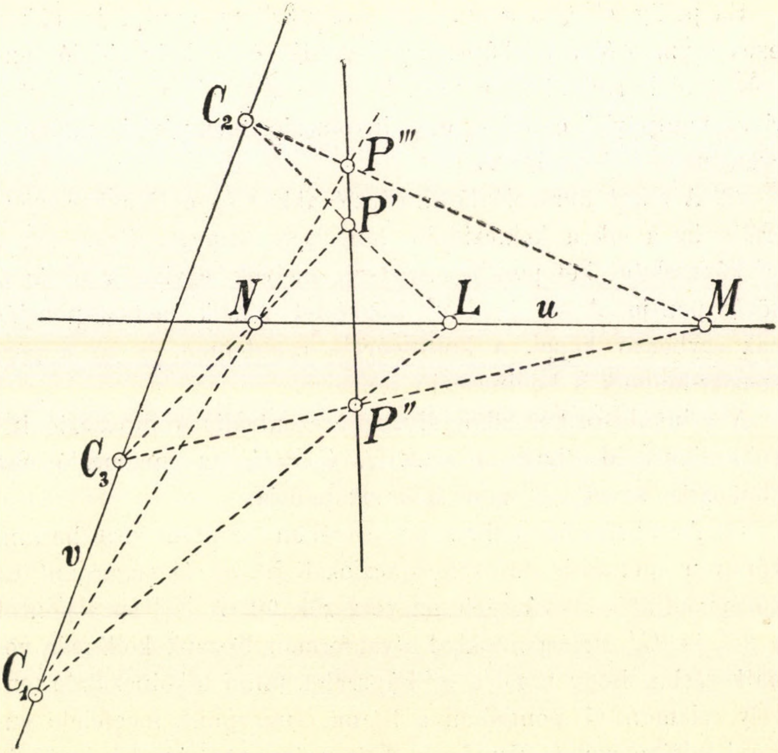
A $\sigma$ involutorikus síkot ábrázoló czentrális kollineáczió involutorikus. Minthogy a $C' \equiv C_1$, $C'' = C_2$ az involuczió egy elempárja, azért a $C$ pont a $\sigma$ sík pontja.

23. Az ábrázolás ebben az esetében szintén végezhetünk könnyen speciális transzformácziókat, ha az új sugárpont $C_3$ középpontját a $x^2$ kúpszeleten veszszük fel. A $|C_3|$ sugárpontot a $|C_1|$ és $|C_2|$ sugárpontokkal olyanformán hozzuk kollineár vonatkozásba, hogy mind a $x^2$ kúpszelet, mind a koinczidáló tengely valamennyi pontjában a három sugárpont megfelelő sugarai találkozzanak. Ezután a $|C_3|$ sugárpontot úgy képezzük le a képsíkra, hogy a $|C_3|$ minden sugarának a képsík ama pontja feleljen meg, mely a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok megfelelő sugarának megfelel.

Ha már most a $P$ pont $P'$, $P''$ képei adva vannak, akkor a $C_3$ pontra vonatkozó harmadik képét következő módon nyerjük (6. ábra). A

$$|P' C_2| \text{ és } |P'' C_1|,$$
$$|P'' C_3| \text{ és } |P''' C_2|,$$
$$|P''' C_1| \text{ és } |P' C_3|$$

sugarak ugyanis párosával az $u$ perspektiv tengely $L$, $M$, $N$ pontjaiban metszik egymást. A keresett harmadik kép $P'''$ tehát a $|C_2M|$ és $|C_1N|$ metszéspontja.




6. ábra.

A $P$ pont $P'$, $P''$, $P'''$ képei egy egyenesen vannak, mert ezek az $u$, $v$ egyenespárba beírt $C_1LC_2MC_3N$ hatszög szembenfekvő oldalainak metszéspontjai.

A koinczidáló pontok és egyenesek harmadik képei az első két képükkel egybeesnek.

G) *Harmadik eset.*

24. Tegyük fel, hogy az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c''\ldots|$ projektiv sugársorok konczentrikusak és hogy két egymástól különböző (valós vagy képzetes), vagy két egybeeső kettős sugaruk van. Jelöljük ezeket $v_1$, $v_2$-vel.

A jelen esetben a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontoknak közös megfelelő sugara a $|C_1C_2|\equiv c$ sugár. Ezenkívül van két különböző (valós vagy képzetes), vagy egybeeső közös megfelelő síkjuk $\omega_1$, $\omega_2$.

A koinczidáló pontok geometriai helye három egyenesből áll. Még pedig a $|C_1C_2|\equiv c$-ből és az $\omega_1$, $\omega_2$ síkok egy-egy $v_1$, $v_2$ egyenesből. Ha $\omega_1$ és $\omega_2$ egybeesnek, akkor $v_1$ és $v_2$ is egybeesnek.

Az $\omega_1$, $\omega_2$ sikok $v_1$, $v_2$ egyeneseit *koinczidáló tengelyeknek* nevezzük. Ezek $\omega_1$, $\omega_2$-vel egyidőben valósak vagy képzetesek.

A koinczidáló pontok képeinek geometriai helye a képsík $v_1$, $v_2$ egyenesei.

25. A koinczidáló egyenesek részben az $\omega_1$, $\omega_2$ síkok egyenesei, részben pedig annak a $C(1, 1)$ lineáris kongruencziának sugarai, melynek a $v_1$, $v_2$ koinczidáló tengelyek a tengelyei.[1]

26. Tegyük most fel, hogy a $v_1$, $v_2$ koinczidáló tengelyek a $V_1$, $V_2$ pontokban metszik a $|C_1C_2|\equiv c$ egyenest. Az $\omega_1$, $\omega_2$ síkoknak a képsík $v_1$, $v_2$ egyenesei felelnek meg, és a $[c]\equiv[\alpha\beta\gamma\ldots]$ siksor egy tetszőleges $\alpha$ síkjának az $a'$, $a''$ sugarak. A $v_1$, $v_2$, $a''$, $a'$ sugarak kettős aránya az ábrázolásra jellemző. Bebizonyítjuk, hogy ez a $V_1$, $V_2$, $C_1$, $C_2$ pontok kettős arányával egyenlő (7. ábra).

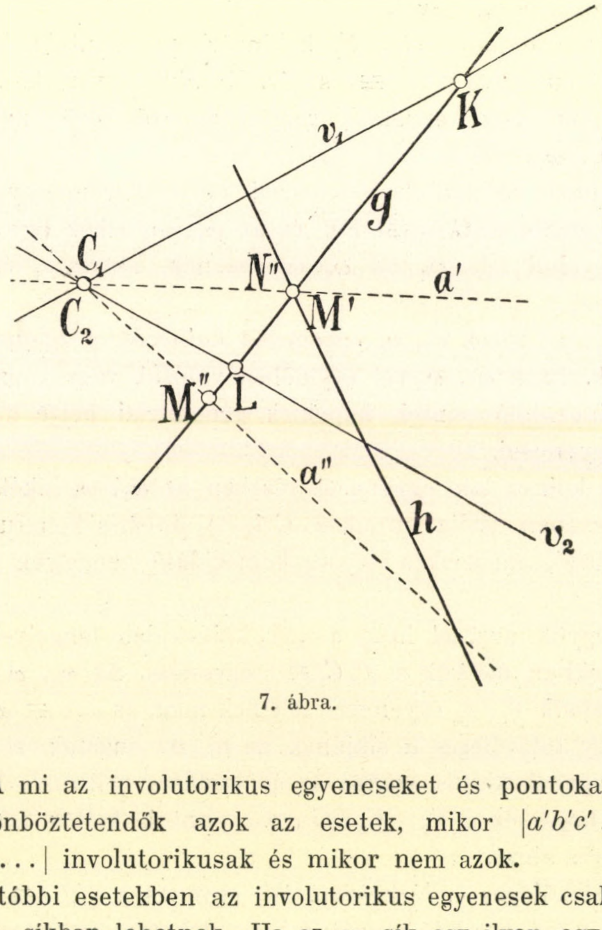
Két tetszőleges $g$, $h$ koinczidáló egyenes a $|C_1C_2|\equiv c$ egyenessel egy másodrendű reguláris sereget határoznak meg. E seregnek a $V_1$, $V_2$, $C_1$, $C_2$ pontjain átmenő sugarai a $g$ egyenest a $K$, $L$, $M$, $N$, pontokban metszik. E szerint

[1] REYE i. m. II. Abt. 180. old.

$$(V_1V_2C_1C_2) = (KLMN) = (K''L''M''N'') = (v_1v_2a''a'),$$

a mivel a bebizonyítás megtörtént.

Ha az $|a'b'c', ..|$, $|a''b''c''...|$ sugársorok involutorikusak, akkor $V_1$, $V_2$-től $C_1$ és $C_2$ által harmonikusan van elválasztva.

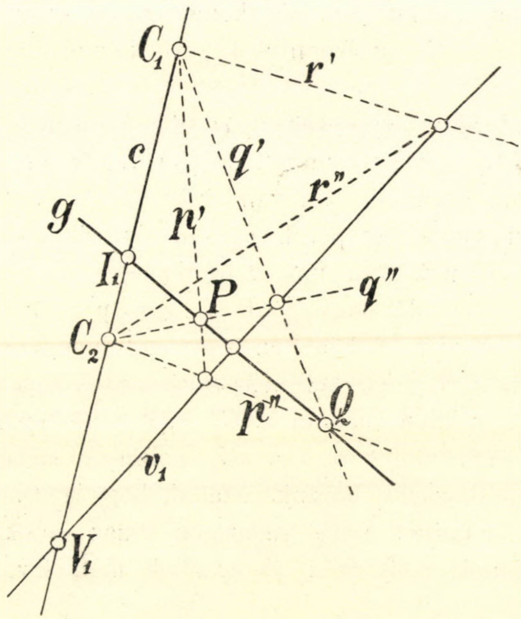



7. ábra.

27. A mi az involutorikus egyeneseket és pontokat illeti, megkülönböztetendők azok az esetek, mikor $|a'b'c'...|$ és $|a''b''c''...|$ involutorikusak és mikor nem azok.

Az utóbbi esetekben az involutorikus egyenesek csak az $\omega_1$ és az $\omega_2$ síkban lehetnek. Ha az $\omega_1$ sík egy ilyen egyenese a $|C_1C_2| \equiv c$ egyenest az $I_1$ pontban, a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontokban foglalt $|p'q'r'...|$, $|p''q''r''...|$ perspektiv sugársorok megfelelő $p'$, $p''$ sugarait $P$, $Q$-ban metszi, akkor az utóbbiak egymástól $I_1$ és $v_1$ által harmonikusan vannak elválasztva. De ebből azután az is következik, hogy $I_1$ $V_1$-től $C_1$ és $C_2$ által harmonikusan van elválasztva (8. ábra).

Ennek következtében az $\omega_1$ sík minden involutorikus egyenese átmegy a $c \equiv |C_1C_2|$ egyenes amaz $I_1$ pontján, mely $V$-től $C_1$ és $C_2$ által harmonikusan van elválasztva. Épen így az $\omega_2$ sík minden involutorikus egyenese átmegy a $c \equiv |C_1C_2|$ egyenes amaz $I_2$ pontján, mely $V_2$-től a $C_1$ és $C_2$ pontok által harmonikusan van elválasztva.




8. ábra.

Az $\omega_1$ sík involutorikus pontpárjai, annak az involutorikus kollineácziónak elempárjai, melynek czentruma $I_1$ és tengelye $v_1$. Épen igy az $\omega_2$ sík involutorikus pontpárjai annak az involutorikus kollineácziónak elempárjai, melynek czentruma $I_2$ és tengelye $v_2$.

28. Ha az $|a'b'c' \ldots|$, $|a''b''c'' \ldots|$ sugársorok involutorikusak, akkor $I_1 \equiv V_2$, $I_2 \equiv V_1$. Ebben az esetben tehát az $\omega_1$, $\omega_2$ síkok involutorikus egyenesei a $C(1, 1)$ lineáris kongrueneziá-

hoz tartoznak, melynek tengelyei $v_1$, $v_2$. Minthogy ebben az esetben az összes nem az $\omega_1$ vagy $\omega_2$ sikokban fekvő koinczidáló egyenesek involutorikus egyenesek, abból következik: *Az involutorikus egyenesek geometriai helye az a* $C(1, 1)$ *lineáris kongruenczia, melynek tengelyei a* $v_1$, $v_2$ *koinczidáló tengelyek.*

29. Ha az $|a'b'c'\ldots|$ $|a''b''c''\ldots|$ konczentrikus projektiv sugársoroknak két kettős sugara egybe esik, akkor a koinczidáló egyenesek egyrészt az $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv \omega$ sík egyenesei, másrészt pedig ama parabolikus lineáris kongruenczia sugarai, melyet a kollineár $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok képeznek és melynek tengelye $v_1 \equiv v_2 \equiv v$.

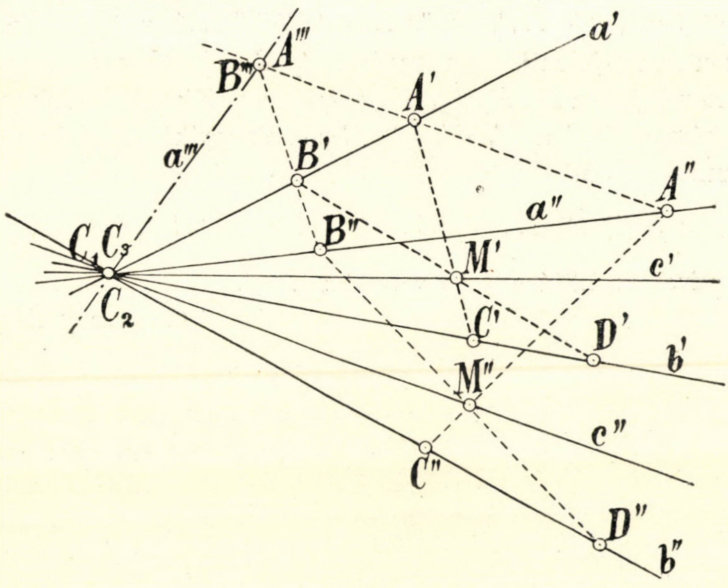
Az involutorikus egyenesek az $\omega$ sikban vannak és átmennek a $c \equiv |C_1 C_2|$ egyenes amaz $I$ pontján, mely $V \equiv V_1 \equiv V_2$-től $C_1$ és $C_2$ által harmonikusan van elválasztva.

Az involutorikus pontpárok egy involutorikus kollineáczió elempárjai, melynek czentruma $I$ és tengelye $v$.

30. Ha a harmadik sugárpont $C_3$ középpontját a $|C_1 C_2| \equiv c$ egyenesen veszszük fel, könnyen végezhetünk speczialis transzformácziókat. A $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontok képezte lineáris kongruenczia minden sugarán a $|C_3|$ sugárpont egy síkja halad át. A $|C_3|$ sugárpontot a $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontokkal kollineár vonatkozásba hozzuk, azáltal, hogy a $|C_1|$, $|C_2|$ megfelelő $\alpha_1$, $\alpha_2$ síkjainak a $|C_3|$ sugárpont amaz $\alpha_3$ sikját tekintjük megfelelőnek, mely az $\alpha_1$ és $\alpha_2$ síkok metszésvonalán halad át.

Ezután a $|C_3|$ sugárpontot a képsikkal hozzuk kollineár vonatkozásba, olyanformán, hogy minden sugarának a képsík ama pontja feleljen meg, mely a neki a $|C_1|$ és $|C_2|$ sugárpontokban megfelelő sugaraknak is megfelel. Ilyen módon a $|C_3|$ sugárpont a tér $P$ pontján átmenő $p'''$ sugarának a képsík $P'''$ pontja felel meg, mely a $P$ pont harmadik képe. A koinczidáló pontok és egyenesek harmadik képe az első két képükkel egybeesik. Ebből következik, hogy valamely pont három képe egy egyenesen van (9. ábra).

A $|C_1 C_2| \equiv c$ egyenesen a $C_3$ czentrumot megadjuk úgy, hogy a $[c]\equiv[\alpha\beta\gamma\ldots]$ síksor $\alpha$ síkjának egy a $C_3$ ponton átmenő egyenesét megadjuk az $A$ és $B$ pontjainak képei által. Könynyen megszerkeszthetjük ennek segítségével az $|a'''b'''c'''\ldots|$ sugársor $a'''$ sugarát. Az $A$ és $B$ pontok harmadik képei ugyanis az $A$ és $B$ pontokon átmenő koinczidáló egyenesek képeinek metszéspontjában egybeesnek. Ez a metszéspont az $a'''$ sugár egy pontja.




9. ábra.

De megszerkeszthetjük a $[c]\equiv[\alpha\beta\gamma\ldots]$ síksor egy tetszőleges $\beta$ síkjának megfelelő $b'''$ sugarát is. A szerkesztést az előbbire vezetjük vissza, a mennyiben a $\beta$ sík oly $C$, $D$ pontpárját szerkesztjük, melyek a $|C_3|$ sugárpont egy sugarán vannak.

Ilyen pontok szerkesztésénél tekintetbe vesszük, hogy az $A$, $B$, $C$, $D$ pontok egy síkban vannak s így az $|A'C'|$ és $|B'D'|$ egyenesek $M'$ metszéspontja, továbbá az $|A''C''|$ és $|B''D''|$ egyenesek $M''$ metszéspontja az $|a'b'c'\ldots|$, projektiv sugársorok megfelelő $c'$, $c''$ sugarain vannak. A $C'$, $D'$, $C''$ pontokat a $b''$ egyenesen tetszőlegesen vehetjük fel, de a $D''$ pontot az $M'$, $M''$ pontok segítségével kell meghatározni.

Ha $\omega$ az $\omega_1$, $\omega_2$ síkok egyike és $P$ egy benne fekvő pont, melynek képei $P'$, $P''$, $P'''$; és ha $v$ az $\omega$ síkban levő koinczidáló tengely, mely a $|C_1C_2| \equiv c$ egyenest $V$-ben metszi, akkor

$$(P'P''P'''C) = (C_1C_2C_3V),$$

hol $C$ az $|a'b'c' \ldots|$, $a''b''c'' \ldots|$, $|a'''b'''c''' \ldots|$ sugársorok közös czentrumát jelenti. Ha ugyanis a $C_1$, $C_2$, $C_3$, $V$ pontokat $P$-ből $v$-re vetítjük, a $P_1$, $P_2$, $P_3$, $V$ pontokat nyerjük, melyeknek mind a három képei a $P'$, $P''$, $P'''$, $C$ pontok egyikében egybeesnek. Ennek folytán

$$(P'P''P'''C \ldots) \,\overline{\wedge}\, (P_1P_2P_3V \ldots) \wedge (C_1C_2C_3V \ldots),$$

a mivel az állításunk be van bizonyítva.

*Privorszky Alajos.*

# ADALÉKOK AZ ÜVEGRÁCSON ELHAJLITOTT FÉNY POLÁROSSÁGÁNAK ELMÉLETÉHEZ.

(Második és befejező közlemény.)

## II. RÉSZ.

**3. §.** A Fröhlich-féle elmélet továbbfejlesztése, nehézségek a rezgő czentrumok értelmezésében. A Stokes-féle felfogás általánosítására vezető egyszerű kisérletek, e felfogás fogalmazása.

A megelőző fejezetben megismerkedtünk az üvegrácson elhajlitott fény vizsgálatának legújabb eredményeivel s láttuk, hogyan állított elő Fröhlich ezek értelmezésére aránylag egyszerű rezgő-czentrumokat.

Az elméletnek következő lépése — egész magától értetőleg — az lenne, hogy számot adjunk arról, *hogyan állnak elő a rácsfelületen azok a hypothetikus rezgési állapotok.* Azonban az ilyen irányú továbbhaladás útjában nem csekély nehézségek lépnek fel.

Már a circumaxiális polározás értelmezésénél is találkozunk ilyen nehézséggel. A legegyszerűbb eset (l. 17. lapon) értelmezéséhez oly rezgésre van szükségünk, melynek iránya egybeesik a zérus intenzitású visszavert sugáréval. A Brewster-törvény szerint ez éppen a megtört fény rezgés iránya. Itt tehát még annyira — a mennyire rendben volna a dolog — ámbár hogy hogyan hozza létre ez a vektor a *levegőben* a circumaxiális rendszert, nehéz elképzelni; azonban már egy kissé általánosabb esetben, mikor t. i. a polározás síkja nem merőleges a beesésére, ez a felfogás is cserben hagy, miután a mindenkori circumaxiális rendszer tengelye nem esik össze a megtört fény mindenkori rezgési irányával.

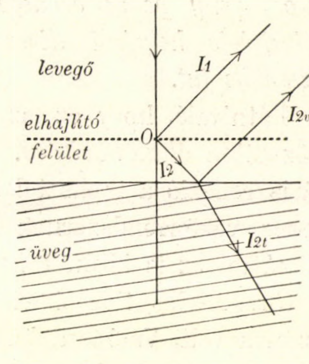
Még sokkal komolyabb természetű akadályra bukkanunk azonban az isogonális rendszer értelmezésénél. Láttuk, hogy ez — az elektromágneses fényelmélet szerint — akkor állhat elő, ha a fénynek mind elektromos, mind mágneses vektora gerjesztőleg hat. Viszont azonban ismeretes, hogy minden eddig ismert fénytünemény leírására pusztán az elektromos vektorral, mint «irányadó» vektorral beérhetni.[1] Egyrészt tehát már ebből a szempontból is igen meglepő volna e tünemények kivételes állása, másrészt pedig tényleg a mágneses vektor fellépését semmiféle egyszerű módon nem lehet magyarázni. Ilyen irányú eredménytelen elméleti próbálgatások, majd meg a STOKES-féle felfogás körül forgó elmélkedések után végre is néhány egyszerű kisérlet vezetett arra az elméletre, a melyet alább ismertetni fogok.

A kicsiny részecskéken történő fényelhajlást óhajtván ugyanis kisérletileg vizsgálni, planparallel üveglemez (jobbfajta tükörüveg) egyik lapját megolvasztott kén fölé tartva, rácsapodó finom kénszemecskékkel vontam be s az így præparált lemezt minden irányra beállítható keretre szerelve egy JAMIN-féle nagy polározó-kör közepére helyeztem. Egy NERNST-lámpának lencsével közel párhuzamossá tett fénye polározó hasábon át merőlegesen esett rá az említett lemez *réteges* felére. A kénrészecskéken a *levegőbe* elhajlított fényt (azaz a *visszaverődve-elhajlított* fényt) nicollal megvizsgálva, azt — elegendő finom részecskék esetén — majdnem teljesen síkban polározottnak találtam, a polározási síkok elrendezését pedig (megközelítőleg) *isogonálisak*, azaz ugyanolyannak, mint a milyent az üveg rácsozása által létesített elhajlított fény mutat.[2] Ez az ered-

[1] V. ö. DRUDE: Lehrb. d. Optik 239. l.

[2] Megjegyzem, hogy mind ezek, mind az alább említendő megfigyelések csupán qualitatív jellegűek voltak, miután e kisérleteket tulajdonképen más szempontból végeztem.

mény különben a 17. lapon mondottak alapján igen nagy valószínűséggel várható is volt. Vessük azonban össze ezt a megfigyelést azzal, a mit a fényszóródásról fentebb (9—11. l.) mondottunk s akkor kimondhatjuk, hogy: *egy kicsiny részecskén elhajlított fény circumaxiálisan van polározva, ha a részecske homogén közegbe van ágyazva, isogonálisan, ha levegő-üveg határfelületére van helyezve.*[1] Miután pedig a részecskét az üvegfelülethez fokozatosan közelítve, az első esetből a másodikba *a jelenséget* folytonosan vihetjük át, közeleső a gondolat, hogy ezt a folyamatot *számítással* is kövessük. A mint a részecske a felülethez közel jön, minden irányból két (elhajlított) sugár jut a megfigyelő szemébe (l. a 4. ábrát); egyik ($I_1$) — a részecskén a beeső fénynyel ellenkező irányban hajlítva el — közvetlenül; a másik ($I_{2v}$) — az átmenő fény irányában hajlítva el — az üvegen való visszaverődés útján. Addig, a míg a részecske távolsága a lemeztől legalább fényhullámhosszrendű, erre a visszaverődésre biztosan alkalmazhatjuk FRESNEL formuláit s így kiszámíthatjuk a két sugár interferentiájának eredményét. *Azzal a feltevéssel élve, hogy akármilyen kis távolság esetén is érvényesek e formulák,* megpróbáltam kiszámolni a polárossági síkok várható elrendezését abban az esetben, mikor a részecske egészen a határfelületre jut s a megfigyelésekkel tökéletesen egyező eredményt kaptam.



4. ábra.

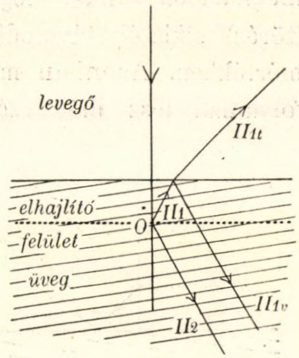
E szerint *a visszaverődéses elhajlításról oly képet alkothatunk magunknak, hogy a beeső fény az elhajlító felület előtt (ámbár hozzá végtelenül közel) szenved elhajlítást (azaz válik gerjesztő középponttá), a megfigyelt visszaverődve-elhaj-*

[1] Ha t. i. a fény normálisan esik a felületre s a visszaverve-elhajlított fényt figyeljük meg.

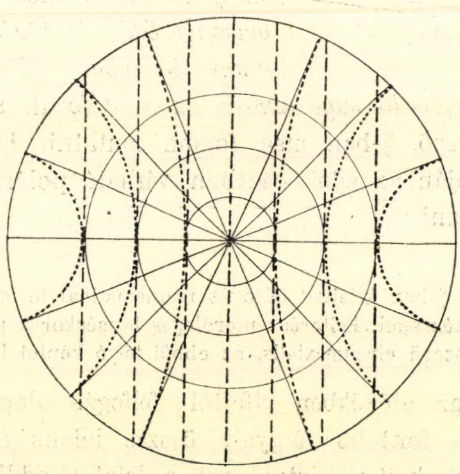
*lított fény pedig eredője annak a két sugárnak, a mely az elhajlítás helyéről direkt, ill. visszaverődéssel a megfigyelő szemébe jut.*

Látnivaló, hogy ez az értelmezés a STOKES-féle felfogásnak közvetlen *általánosítása*. Belátjuk azt is, miért áll az irreguláris reflexió a tapasztalattal ellentétben. Éppen, mert a tényleges vektorrendszernek csak egyik összetevőjét tartalmazza. Egyúttal az is kitűnik, hogy a STOKES-féle felfogás módosítandó a töréses-elhajlítás értelmezése végett is, a melyre eredetileg szánva volt. Valóban, ha a tárgyalt esetben a *megtörve* elhajlított (az üvegbe lépő) fényt azonosítani akarnók az ($I_2$) sugárnak az üvegbe lépő ($I_{2t}$) részével, akkor az üvegben csak egy olyan kúpon belől kapnánk elhajlított fényt, melynek félnyílásszöge a teljes visszaverődés határszöge (a surlódó beeséshöz tartozó törésszög). A tapasztalat szerint azonban a megtörve-elhajlított fény is kitölti a maga félterét. Ehhez az eredményhez is könnyen eljuthatunk, ha az *üvegben* is (hozzá végtelenül közel) *felveszünk egy elhajlító felületet*, a mit már a szimmetria is követel, nem lévén egyelőre okunk az egyik közeget a másik felett kitüntetni. Az ezen történő fényelhajlás (l. az 5. ábrát) azután a ($II_2$) és ($II_{1v}$) sugarakat szolgáltatja a megtörve-elhajlított, a ($II_{1t}$) sugarat a visszaverődve-elhajlított fényhez.

Itt lesz helyén felemlíteni egy a ($II_{1t}$) sugárrenszderre vonatkozó megfigyelést, a mely itt közölt felfogásmódunkkal szintén szoros vonatkozásba hozható. Az említett kéncsapadékon történő fényelhajlást homogén közegben akarván létesíteni, az üveglemez réteges oldalát egy csepp cédrusolaj közvetítésével közel ugyanakkora törésmutatójú üvegfélgömb átmérő-lapjára ragasztottam (l. a 2. ábrát) miután a kénréteget védelmül igen vékony kollodium-hártyával vontam be. Akár a félgömbön, akár a lemezen keresztül esett e præparatumra (az átmérőlapra merőlegesen) síkban polározott fény, a kénrészecskéken elhajlított sugarak közül a félgömbön irányváltozás nélkül kilépő sugarak a várható *circumaxiális*, a lemezen át közönséges töréssel kilépők pedig az *isogonális* polározást mutatták. Ez a kisérlet tehát azt mutatja, hogy a *circumaxiális rendszerből egyszerű töréssel isogonális rendszer keletkezhet.*[1] Ezt az első pillanatra annyira meglepő eredményt könnyebben megértendő, a 6. ábrán sztereografikus vetületben ábrázoltunk egy gömbfelületet, rajta a circumaxiális elrendezést (pontozott közök) és az isogonális polározást (vonalkázott egyenesek) ábrázoló vonalrendszerekkel, a melyre még a meridiánok és parallelkörök hálózatát is felrajzoltuk. Látnivaló, hogy kisebb pólustávolságoknál az eltérés közöttük elég kicsiny, nagyobbaknál szintén nagyobb, de mindig olyan, hogy az isogona-

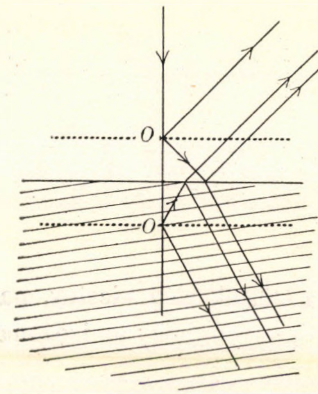


5. ábra.


6. ábra.

[1] Ez egyúttal STOKES irreguláris törését is igazolja, de csak ebben a legegyszerűbb esetben, a belső totális reflexió határszögéig, a melyet ő éppen az ilyen, üvegből levegőbe megtörve-elhajlított fény polározási állapotának leírására konstruált.

litásnak megfelelő polározási irány nagyobb szöget zár be az elhajlás (s egyúttal törés) síkjával, mint az eredeti circumaxiális; megfelelően annak, hogy törésnél a polárosság síkja a beesés (törés) síkjától távolodik, a beesés szögével együtt növekvő mértékben. Azonban minderről majd a későbbi számolások folyaman lesz még szó. Mielőtt ezekre rátérnék, most még egyszer összefoglalom az eddig mondottakat:



7. ábra.

Két különböző közeg határfelületén keletkező fényelhajlásról oly képet alkothatunk magunknak, hogy ez a *határfelület két oldalához végtelen közel mint homogén közegben keletkező fényelhajlás jön létre; a megfigyelt* (visszaverődve, ill. megtörve) *elhajlított fény pedig ezen elhajlító czentrumokból direkt, ill. visszaverődés és törés után ugyanazon irányban kiinduló s egymással interferáló sugaraknak az eredője* (l. a 7. ábrát).

A következő §-ban meg fogom mutatni, hogyan lehet e felfogás alapján az adott esetben várható polározási azimutokat kiszámitani.

**4. §.** Az előző §-ban kifejtett felfogás mathematikai formulázása; az általános eset nehézségei. Feltevés: merőleges beeséskor a primær fényelhajlás egyszerű circumaxiális, az ebből folyó képlet levezetése.

Jóllehet az előzőkben kifejtett felfogás alapján — ha az helyes — a fentebb tárgyalt összes jelenségek quantitativ leirásához el kellene jutni, ezt a leirást eddigelé csupán a merőleges beesés esetére tudtam keresztülvinni. Ennek a korlátozásnak okairól legyen szabad néhány szót előrebocsájtanom.

A szóban forgó értelmezésnek lényege az, hogy a határfelületen létesülő fényelhajlást egyszerűbb esetre, a homogén közegben előálló fényelhajlásra vezeti vissza.

Láttuk azonban (11. l.), hogy a homogén közegben elhajlított fénynek is csak polárossági állapotát ismerjük, de intensitás-eloszlását nem; holott nekünk erre is szükségünk van, hogy a direkt és a visszavert sugár eredőjének polározási azimutját kiszámithassuk. Továbbá ezek az ismereteink is csupán arra az esetre vonatkoznak, mikor közönséges haladó fényhullámból keletkezik az elhajlított fény; holott egy visszaverő lap előtt általában sokkal komplikáltabb fényrezgési állapot van.

Mindezek a nehézségek normális beesésnél lépnek fel még a legkisebb mértékben. Egyrészt a szabályosan visszavert fény *intensitása* ez esetben a legkisebb, másrészt *iránya* összeesik a beesésével, azaz — legalább a törésmutató nem nagyon nagy értékénél — merőleges beesésnél a határfelület előtt keletkező fényrezgési állapot nem különbözik lényegesen attól, a mely közönséges haladó fényhullámban uralkodik. A határfelület másik oldalán — a megtört fényben — természetesen mindig ez az egyszerű rezgési állapot áll fenn, az innen származó fényelhajlással tehát biztosabban számolhatunk.

Nevezzük egyszerűség kedvéért *első* közegnek azt, a melyben a szóban forgó elhajlított sugarak tovahaladnak s számoljunk először azzal a feltevéssel, hogy

1. **a fényelhajlás az első közegben történik.**[1]

Erről a — homogén közegben létesülő — fényelhajlásról az előző meggondolások alapján a *legegyszerűbb feltevéssel* élve *felteszszük*, hogy benne *a polározási síkok is, az intensitás is olyan egyszerű circumaxiális elrendezést mutatnak, melynek iránya a felületen lévő fenyvektor rezgés-iránya,* a fényvektort az elektromos vektorral azonosítva.[2]

---

[1] Lásd a 4. ábrát.

[2] Szükségesnek látom ehhez a feltevéshez némi megjegyzést fűzni. E feltevés tulajdonképen azt jelenti, hogy az a — hogy úgy mondjam — *primaer* fényvektor-rendszer, a mely a felületen keletkezik s a melyből a megfigyelhető elhajlított fényt a már többször említett módon rakjuk össze teljesen meg van határozva a *felületen* lévő fényrezgés, mondjuk elek-

Legyen (l. az 1. ábrát) $\overrightarrow{ZO}$ a beeső fény iránya, a $ZOX$ sík ennek rezgéssíkja, azaz a $ZOY$ sík a polározási síkja, legyen $\overrightarrow{OR}$ egy tetszőleges elhajlított sugár, $NOR\sphericalangle = \omega$ az elhajlás szöge és $POY\sphericalangle = \vartheta$ az a szög, a melyet a $ZOR$ elhajlás síkja a beeső fény polározási síkjával alkot.

Legyen $a$ az $O$-ban történő circumaxiális gerjedés amplitudója,[1] akkor e beeső vektor amplitudójának

az elhajlás síkjával párhuzamosan rezgő componense $a \sin\vartheta$
« « síkjára merőlegesen « « $a \cos\vartheta$

és a közvetlenül $(\vartheta, \omega)$ irányban induló rezgés $(I_1)$ megfelelő componensei az *egyszerű* circumaxialitás értelmében

$$\begin{aligned} K_p &= a \sin\vartheta \cos\omega, \\ K_m &= a \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{1}$$

Ez a rezgés jut közvetlenül a megfigyelő szemébe; egy közönséges visszaverődés után pedig az $O$-ból $(\vartheta, \pi-\omega)$ irányban induló rezgés ($I_2$ l. a 4. ábrát), melynek componensei

$$\begin{aligned} B_p &= a \sin\vartheta \cos(\pi-\omega) = -a \sin\vartheta \cos\omega, \\ B_m &= a \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{2}$$

Legyen a $ZOR\sphericalangle = \omega' = \pi - \omega$, akkor a FRESNEL-formulák szerint a visszavert fényrezgés amplitudóinak összetevői

---

tromos rezgés által. Ez a feltevés mindenesetre *csak első közelítésben* helyes, miután inkább a szigorúan vett *fénygerjedés* (fluoreszkálás) természetének felel meg, mintsem a *fényelhajlásának*. A fényelhajlásban a fényvektor *felületi értékein* kívül mindig szerepel ennek *normális-menti differencziálhányadosa* is. Ennek a szereplése teszi éppen a lényeges különbséget a HUYGHENS-elv FRESNEL-féle alkalmazása és POISSON-KIRCHHOFF-féle szigorú fogalmazása közt.

[1] Maga a fényvektor tehát $\frac{a}{r} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ alakú volna. Nekünk azonban elegendő volna az egységnyi távolságban való amplitudóval dolgozni. Jegyezzük meg egyúttal, hogy az $a$-ra vonatkozólag semmi határozott feltevést (hogy például arányos volna a beeső, esetleg az eredő rezgéssel stb.) nem teszünk, kivéve a mi az irányát illeti.

$$\begin{aligned} V_p &= \phantom{-}B_p \frac{\operatorname{tg}(\omega'-\chi')}{\operatorname{tg}(\omega'+\chi')}, \\ V_m &= -B_m \frac{\sin(\omega'-\chi')}{\sin(\omega'+\chi')}, \end{aligned} \tag{3}$$

a hol $\chi'$ az $\omega'$ beesési szöghöz tartozó s a

$$\frac{\sin\omega'}{\sin\chi'} = n$$

törési törvényből adódó hegyes szöget jelenti. Könnyű belátni, hogy (3)-ban $\omega'$ helyett $\omega=\pi-\omega'$-t tehetünk, ha egyúttal $\chi'$ helyett a

$$\frac{\sin\omega}{\sin\chi} = n$$

ből adódó s $\omega$-val ugyanegy környegyedben lévő, most tehát tompa $\chi$ szöget teszszük. E szerint tehát

$$\begin{aligned} V_p &= -a \sin\vartheta \cos\omega \frac{\operatorname{tg}(\omega-\chi)}{\operatorname{tg}(\omega+\chi)}, \\ V_m &= -a\cos\vartheta \frac{\sin(\omega-\chi)}{\sin(\omega+\chi)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Miután feltettük, hogy az elhajlító réteg a határfelülethez végtelenül közel van, (1) és (4) között útkülönbség nincs és így özvetlen összeadással adódnak az eredő rezgés componensei:

$$\begin{aligned} E_p &= a \sin\vartheta \cos\omega \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\omega-\chi)}{\operatorname{tg}(\omega+\chi)}\right), \\ E_m &= a\cos\vartheta \left(1 - \frac{\sin(\omega-\chi)}{\sin(\omega+\chi)}\right) \end{aligned}$$

vagy egyszerű átalakítás után:

$$\begin{aligned} E_p &= a \sin\vartheta \cos\omega \frac{2\sin\chi\cos\chi}{\sin(\omega+\chi)\cos(\omega-\chi)}, \\ E_m &= a\cos\vartheta \frac{2\sin\chi\cos\omega}{\sin(\omega+\chi)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Legyen $\varphi$ a szóban forgó elhajlitott sugárnak az elhajlás síkjára vonatkozó polározási azimutja, akkor tehát

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E_p}{E_m} = \frac{\cos\chi}{\cos(\omega-\chi)} \cdot \operatorname{tg}\vartheta \tag{6}$$

a keresett összefüggés a beeső és az elhajlitott fény polározási azimutja valamint az elhajlás szöge s a rácsanyag törésmutatója között.

Mint látnivaló, ez a képlet közvetlenül a STOKES-féle

$$\operatorname{tg}\varphi = m' \operatorname{tg}\vartheta$$

alakba írható, a jelen esetben pedig

$$m' = \frac{\cos\chi}{\cos(\omega-\chi)} \cdot$$

Mielőtt ez eredmény megbeszélésébe fognánk, mutassuk meg, hogy — a 31. lapon említett kisérletnek megfelelően — ugyanezen képlethez még sokkal egyszerűbb úton juthatunk el, ha feltételezzük, hogy

2. **a fényelhajlás a második közegben történik.**[1]

Ezen feltevés értelmében (5. ábra) az *I.* közegben megfigyelt ($\vartheta$, $\omega$) irányú sugár nem más, mint a *II.* közegben ($\vartheta$, $\chi$) irányban induló $II_1$ sugárnak megtört része, $II_{1t}$.

A ($\vartheta$, $\chi$) irányban induló circumaxiális rezgés amplitudóinak componensei (1) analogiájára

$$\begin{aligned} B'_p &= a \sin\vartheta \cos\chi, \\ B'_m &= a \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{7}$$

A törés után ezekből (megint az $\omega$, $\chi$ szögek bevezetésével nyert FRESNEL-formulák szerint) lesznek

[1] Lásd az 5. ábrát.

$$T'_p = B'_p \frac{2 \sin \omega \cos \chi}{\sin (\chi + \omega) \cos (\chi - \omega)},$$

$$T'_m = B'_m \frac{2 \sin \omega \cos \chi}{\sin (\chi + \omega)}$$

és így az elhajlított fény polározási azimutjára nyerjük a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T'_p}{T'_m} = \frac{\cos \chi}{\cos (\omega - \chi)} \operatorname{tg} \vartheta \tag{8}$$

a (6)-al tökéletesen egyező képletet.[1]

E második levezetéshez még azt a megjegyzést fűzhetjük, hogy benne nem szükséges az egyszerű circumaxialitást, azaz az intensitásoknak is circumaxiális eloszlását feltételezni. Valóban, a míg csak a circumaxiális *polározás* fennáll, azaz a míg

$$\frac{B'_p}{B'_m} = \operatorname{tg} \vartheta \cos \chi$$

addig a (8) képlet is változatlan marad, úgy hogy a (7) helyett az általánosabb

$$B'_p = af(\vartheta, \omega) \sin \vartheta \cos \chi,$$

$$B'_m = af(\vartheta, \omega) \cos \vartheta$$

feltevésekkel is élhetünk s itt az $f(\vartheta, \omega)$ tetszőleges függvény lehet, míg az első levezetésbe ilyen általánosítással csak olyan függvényt hozhatunk be, a mely az

$$f(\vartheta, \omega) = f(\vartheta, \pi - \omega)$$

feltételnek eleget tesz.

---

[1] Ugyanezt a képletet hozza le természetesen STOKES is, de a *megtörve* elhajlított fényre. Látnivaló, hogy a mi értelmezésünk szerint inkább azt a megkülönböztetést kellene tenni: levegőbe elhajlított fény, üvegbe elhajlított fény, míg az a körülmény, hogy a szóban forgó elhajlított sugár a megtört vagy a visszavert fény oldalán van-e, mellékes. A tapasztalás ezt a következtetést igazolja is, mint látni fogjuk.

A levezetésekben, ill. a hozzávaló rajzokban hallgatólag feltettük, hogy a kisebb törésmutatójú I. közegbe lépő elhajlított fényt figyeljük meg. Természetesen ugyanez a képlet a II. közegbe lépő fény azimutját is megadja, ha csak beléje az elhajlási szög megfelelő értékeit helyettesítjük.

Szinte felesleges említeni, hogy a (6) képlet a homogén közegben létesülő fényelhajlást is magában foglalja. Valóban, $n=1$ esetben $\chi=\omega$ lévén a (6) átmegy a

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \vartheta \cos \omega$$

jól ismert képletébe a circumaxiális polározásnak.

**5. §.** Az elmélet és kisérlet egybevetése merőleges beesésnél, üvegrácsról levegőbe visszaverődve elhajlított fény esetén. *a)* Beeső fény lineár-poláros. Fröhlich adatainak összehasonlítása a számított értékekkel; igen jó egyezés. Kronstein adatai; a számítás valószínűleg nem egyezik a mérésekkel, ha $n>1{,}60$. *b)* Beeső fény természetes. Fröhlich megfigyeléseinek kibővítése. Az elhajlított fény az elhajlás síkjában partiálisan polározva van.

Eljutottunk végre addig, hogy elméleti úton nyert képletünket a kisérleti eredményekkel összevessük. Ezt az összehasonlítást először azon az adatsorozaton végeztem el, a melyet Fröhlich idézett könyvének 316. lapján közöl, mint a lineár-poláros fény merőleges beesésénél keletkező (a levegőbe) visszaverődve-elhajlított sugarak polározási azimutjait.

Az összehasonlítás eredményeit az I. táblázat tartalmazza, a hol $\vartheta$, $\omega'$ jelentik a szóban forgó elhajlított sugár gömbi koordinátáit, $\varphi_0$ a megfigyelt polározási azimutot, $\varphi_c$ a fenti képletből számítottat; $\varphi_c-\varphi_0$ e szerint annak a mértéke, mennyire adja vissza képletünk a valóságot, végül $\vartheta+\pi-\varphi_0$ a megfigyelt azimutoknak a *szigorú isogonalitástól* való eltérést méri.

I. Táblázat.

| $\vartheta$ | $\omega'$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_c-\varphi_0$ | $\vartheta+\pi-\varphi_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 00°,0 | 26°,0 | 179°,7 | 180°,0 | + 0°,3 | + 0°,3 |
| 00,0 | 45,0 | 180,1 | 180,0 | — 0,1 | — 0,1 |
| 00,0 | 80,0 | 180,0 | 180,0 | 0,0 | 0,0 |
| 45,0 | 26,0 | 223,3 | 224,1 | + 0,8 | + 1,7 |
| 45,0 | 45,0 | 221,0 | 222,6 | + 1,6 | + 4,0 |
| 45,0 | 80,0 | 223,9 | 224,0 | + 0,1 | + 1,1 |
| 90,0 | 26,0 | 270,2 | 270,0 | — 0,2 | — 0,2 |
| 90,0 | 45,0 | 270,1 | 270,0 | — 0,1 | — 0,1 |
| 90,0 | 80,0 | 270,7 | 270,0 | — 0,7 | — 0,7 |
| 135,0 | 26,0 | 316,3 | 315,9 | — 0,4 | — 1,3 |
| 135,0 | 45,0 | 319,0 | 317,4 | — 1,6 | — 4,0 |
| 135,0 | 80,0 | 318,4 | 316,0 | — 2,4 | — 3,4 |
| 180,0 | 26,0 | 359,5 | 360,0 | + 0,5 | + 0,5 |
| 180,0 | 45,0 | 359,7 | 360,0 | + 0,3 | + 0,3 |
| 180,0 | 80,0 | 360,2 | 360,0 | — 0,2 | — 0,2 |
| 225,0 | 26,0 | 43,6 | 44,1 | + 0,5 | + 1,4 |
| 225,0 | 45,0 | 41,4 | 42,6 | + 1,2 | + 3,6 |
| 225,0 | 80,0 | 43,2 | 44,0 | + 0,8 | + 1,8 |
| 270,0 | 26,0 | 90,4 | 90,0 | — 0,4 | — 0,4 |
| 270,0 | 45,0 | 90,4 | 90,0 | — 0,4 | — 0.4 |
| 270,0 | 80,0 | 90,8 | 90,0 | — 0,8 | — 0,8 |
| 315,0 | 26,0 | 137,1 | 135,9 | — 1,2 | — 2,1 |
| 315,0 | 45,0 | 139,5 | 137,4 | — 2,1 | — 4,5 |
| 315,0 | 80,0 | 137,9 | 136,0 | — 1,9 | — 2,9 |

Ha figyelmünket elsősorban erre a rovatra fordítjuk, észreveszszük, hogy a jelen esetben — mint már jeleztük — az isogonális polározás törvénye nagy közelítéssel fennáll. Azonban a tőle való eltérések nagyobbak és szabályosabbak, semhogy kisérleti hibának lehetne betudni őket.

Az utolsóelőtti rovat megtekintése arról győz meg, hogy a mi

$$\operatorname{tg} \varphi = m' \operatorname{tg} \vartheta$$

képletünk ezeket a finom eltéréseket is elég hiven adja vissza.

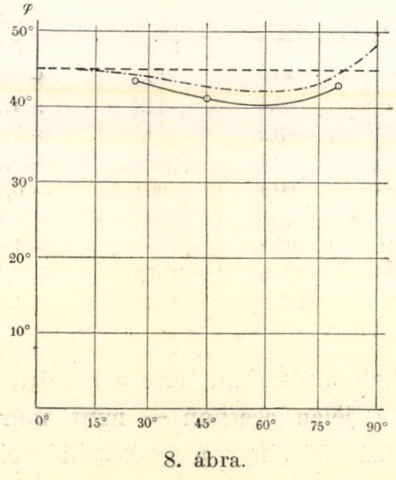
Sőt, igy magában tekintve e táblázatot, a megegyezést kitünőnek mondhatni, miután az előforduló legnagyobb 2°,4 eltérés is olyan $\varphi_0$ értéknél jelentkezik, melynél a rácsozás közének befolyása is $\pm 1^\circ,2$ eltérésben nyilvánul.[1] Áttekinthetőség kedvéért a 8. rajzon grafikusan is ábrázoltam a $\vartheta = 45^\circ$ elhajlási síkban lévő sugarak azimutjait, a mint azok a megfigyelésből (——), az isogonalitásból (--------) és a fenti képletből adódnak (—·—·—). A számitás különben igen egyszerűen történik. A $\sin\omega = n \sin\chi$ képletből kiszámítjuk az $\omega = 26^\circ$, $45^\circ$, $80^\circ$-hoz tartozó $\chi$ értékeket. E rácsra a polározás szöge $P = 56^\circ 15'$ adatából

$$n = \operatorname{tg} P = 1{,}497,$$

majd a megfelelő

$$m = \frac{\cos\chi}{\cos(\omega' - \chi)}$$

értékeket s végül a $\operatorname{tg}\varphi = m \operatorname{tg}\vartheta$-ból a $\varphi_c$ értékeket. Az $m = 1$




8. ábra.

adná az isogonális polározást, míg például a most tárgyalt esetben $\omega' = 26^\circ$, $45^\circ$, $80^\circ$-nak megfelel

$$m = 0{,}967,\ 0{,}920,\ 0{,}966.$$

Az $m$ értékei egyúttal a $\vartheta = 45^\circ$-hoz tartozó $\operatorname{tg}\varphi_c$ értékek is.

---

[1] V. ö. az idézett helyen közölt teljes táblázat ötödik és nyolczadik rovatát.

Ez egyúttal a legérdekesebb eset, mert egy bizonyos $\omega$-nál ekkor vagy pontosabban a $\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{1}{m}}$-ből adódó $\vartheta$ mellett van a legnagyobb különbség $\vartheta$ és $\varphi_c$ között. A *tg* értéke persze nem szabja meg, hogy a megfelelő szög melyik quadránsban keresendő; a most közölt táblázatban a 0° azimut alatt beeső fényhez tartozó önmagában visszavert fény azimutját Fröhlich után 180°-nak vettük, a többi értékek ebből már a folytonosság alapján egyértelműleg meg vannak határozva. Ezentúl egyszerűség kedvéért inkább a $|\varphi_c| \leqq \frac{\pi}{2}$ értékeket fogjuk használni.

Fröhlich egyetemi tanár úr szivességéből alkalmam volt a most közölteken kívül összehasonlító számításokat végezni még egy táblázat adataival, a mely Kronstein Béla tanárjelölt, jelenleg debreczeni főreáliskolai tanár úr mérési adatait tartalmazza. Ezek a mérések ugyancsak a merőleges beesésnél keletkező, üvegrácson levegőbe visszaverődve-elhajlított fényrendszerre vonatkoznak, de *öt* különböző: $n_D = 1{,}4781$, *1,4782, 1,6222, 1,7547 és 1,9303* törésmutatójú üveggel végeztettek. A számítás folyamán azonban kiderült, hogy a táblázatban két, esetleg három törésmutató valószínűleg fel van cserélve s ezért az összehasonlítás eredményét nem fogom részletesen közölni. Mégis, mint *igen valószínű* következtetéseket említhetem, hogy a két legkisebb törésmutatójú rács adatai a számítással épp oly jól egyeznek, mint a közölt Fröhlich-féle adatok, míg $n_D = 1{,}6222$-től kezdve az adatokból a mi elméletünkkel szemben határozott irányú s a törésmutató növekedésével növekvő eltérés olvasható ki. Nevezetesen, míg az elmélet szerint $n = 1{,}60$-en túl $m' > 1$, azaz $|\varphi_c| > |\vartheta|$ is lesz, addig a mérések szerint ez sohasem következik be, sőt a legnagyobb $n_D = 1{,}9303$ törésmutatójú rácson már $|\varphi_c|$ lényegesen kisebb $|\vartheta|$-nál. Nyilván a törésmutató ily nagy értékeinél már nem lehet a 34. lapon tett egyszerű feltevésekkel élni. Azonban még igen korai volna ezek alapján az elmélet bővítéséről beszélni.

Áttérek most azoknak a megfigyeléseknek felemlítésére, a melyeket az üvegrácsra normálisan beeső *természetes* fényből keletkező visszaverődve-elhajlított fénysugarakon végeztem s a melyek a FRÖHLICH-féle megfigyelések kibővítésére s bizonyos értelemben az elmélet megerősítésére vezettek.

FRÖHLICH többször idézett műve 43. §. 2. pontjában ugyanis az a nevezetes megfigyelés foglaltatik, hogy *normálisan beeső lineár-poláros fény esetén az elhajlított fény intenzitása független a beeső fény azimutjától;* a 39. §. 2. pontja szerint pedig *normálisan beeső természetes fény esetén valamennyi elhajlított sugár szintén természetes állapotú;* mely utóbbi különben az előbbi törvénynek közvetlen folyománya.

Ez a két megfigyelés azonban a mi képletünkkel ellentétben áll. Valóban a 37. lap (5) képlete szerint az elhajlított fény intenzitása

$$I_\vartheta = E_p^2 + E_m^2 =$$

$$= a^2 \left(\frac{2\sin\chi\cos\omega}{\sin(\omega+\chi)}\right)^2 \left\{\cos^2\vartheta + \left(\frac{\cos\chi}{\cos(\omega+\chi)}\right)^2 \sin^2\vartheta\right\}$$

vagy másképp

$$I_\vartheta = I_{\vartheta=0}\left\{\cos^2\vartheta + m'^2 \sin^2\vartheta\right\}$$

ez pedig, a míg

$$m' \neq 1$$

a $\vartheta$-tól nem független. Így pl. $n=1{,}50$ esetén és $\omega'=45°$-nál

$$I_{\vartheta=90} = 0{,}846\, I_{\vartheta=0}$$

ilyen arányban kellene tehát a szabad szemmel megfigyelt sugár intenzitásának változni, ha a polározót 90°-al elforgatjuk. Miután nem ismertem határozott adatot arra, hogy milyen rendű intenzitásváltozást lehet ilyen körülmények között észrevenni, az elméletnek másik folyományát tettem kisérlet tárgyává, azt, a mit természetes beeső fényre vonatkozólag mond. E szerint ugyanis az elhajlított fény ez esetben sem természetes, hanem *parcziálisan poláros* fény. Mert hiszen

$$\operatorname{tg}\varphi = m' \operatorname{tg}\vartheta$$

lévén, ha, mint rendesen, $m' < 1$, akkor egyúttal $|\varphi| < |\vartheta|$, tehát akármekkora a beeső fény polározási azimutja $\vartheta$, az elhajlított fénynek az elhajlás síkjában polározott komponense viszonylag nagyobb lesz, tehát természetes beeső fény esetén is az elhajlított fény az elhajlás síkjában lesz parcziálisan polározva.[1] A parcziális polárosság felismerésére pedig igen érzékeny polariskópokkal rendelkezünk s valóban egy SAVART-féle lemezt téve az analysátor elé, a szóban forgó sugarakat az elhajlás síkjában parcziálisan polározottaknak találtam. Megpróbáltam azután meg is mérni ezt a parcziális polárosságot a szokásos módon, üveglemezzel való kompenzálással.[2] Ismeretes, hogy planparallel üveglemezre eső s az átmenő fény azimutja közt a

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_1}{\cos^2 (i-r)}$$

összefüggés áll fenn, azaz a beeső természetes fény az áthaladás után a beesés síkjára merőlegesen van parcziálisan polározva. Ha tehát a fenti

$$\operatorname{tg} \varphi = m' \operatorname{tg} \vartheta$$

törvény szerint parcziálisan polározott fényt planparallel üveglemezre ejtjük úgy, hogy a beesés síkja a parcziális polárosság síkjával összeessék és a beesés szögét úgy választjuk meg, hogy

$$m' = \cos^2 (i-r)$$

legyen, akkor az áthaladó fényt ismét természetes állapotú lesz, benne a SAVART-csíkok nem látszanak.[3]

Azonban, bármilyen egyszerű is elvben a parcziális poláros-

---

[1] Az elhajlás síkjára merőlegesen, ha $m'>1$. Jegyezzük meg egyúttal, hogy ez a parcziális polárosság tulajdonképen már abból a *kisérleti* tényből, hogy beeső líneár-poláros fény esetén a polárossági állapot nem szigorúan isogonális, azaz $\varphi \neq \vartheta$, nagy valószínűséggel következtethető.

[2] V. ö. pl. WINKELMANN: Haudb. d. Phys. II. kiadás VI. 1250–52. l.

[3] Nyilván ez a kompenzálás csak oly sugarakon lehetséges, a melyek a STOKES-féle általános

$$\operatorname{tg} \varphi = m' \operatorname{tg} \vartheta$$

törvények hódolnak. Ily módon lehetséges lenne e törvényt ellenőrizni s egyúttal az $m'$-t egyetlen mérésből meghatározni.

ság mérése, az éppen rendelkezésemre álló eszközökkel pontos méréseket még nem végezhettem. A fellépő nehézségek részletezése igen messze vezetne, e helyett a II. táblázaton összeállítottam néhány tájékoztató adatot, a melyet egy — ugyancsak FRÖHLICH tanár úrtól származó — átlós lapján rácsozott $n_D = 1{,}616$ törésmutatójú derékszögű egyenlőszárú üveghasábon nyertem; benne $\omega'$ jelenti a beeső és elhajlított sugár közti szöget, $i$ az üveglapra való beesés szögét, melynél a kompenzálás bekövetkezett, végül

$$p = 100 \,.\, \frac{1-\cos^4(i-r)}{1+\cos^4(i-r)}$$

a parcziális polárosságot százalékokban. A $p$-nek kissé nagy értékei[1] valószínűvé teszik, hogy a megfigyelésből nem volt minden hamis fény teljesen kiküszöbölve, ámbár ilyen rendű parcziális polárosság nicollal még mindig csak a fényintenzitás kellő megválasztásánál ismerhető fel.

Az a körülmény, hogy még $\omega'=75^\circ$-nál is a beesés síkjában fekvő polárosság észlelhető, mutatja, hogy ekkora törésmutató esetén képletünk tényleg már nem használható, viszont a kompenzálás lehetősége kétségtelenné teszi, hogy e parcziális polárosság már az isogonálitástól való eltérésből az

$$m'_{obs} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\operatorname{tg}\vartheta} = \cos^2(i-r)$$

képlettel számítható. Ennek az összefüggésnek az ellenőrzése azonban sokkal pontosabb méréseket igényel.

**II. Táblázat.**

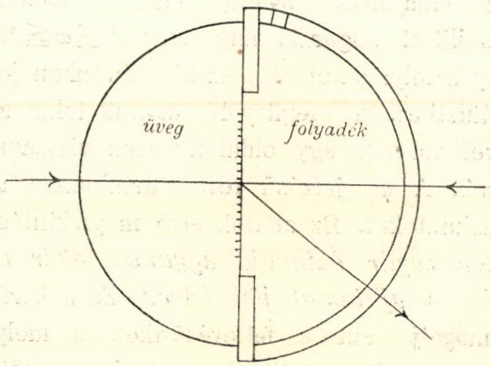
| $\omega'$ | $i$ | $p$ |
|---|---|---|
| 30° | 44° | 9% |
| 45 | 52·4 | 14 |
| 60 | 57·1 | 18 |
| 75 | 45·7 | 10 |

[1] Az említett KRONSTEIN-féle adatokból körülbelül $^2/_3$-szor ekkora polárosság adódna.

6. §. Az elmélet és kisérlet folytatólagos egybevetése; a merőlegesen beeső fény elhajlása üveg és különböző folyadékok határfelületén történik. Kronstein és Kronberger adatai; igen jó egyezés. Ha $n<1$, az elmélet elliptikus polározást ad a totalreflexió határszögén túl lévő sugarakra; az ezekre érvényes képletek.

Az eddigiekben két typikus polározási állapotról beszéltünk, a *circumaxiális* és *isogonális* polározásról s láttuk, hogy képletünk mindkettő pontos quantitativ leírására alkalmas.

Miután a circumaxiális rendszer homogén közeg belsejében, az isogonális lényegesen különböző optikai közegek (üveg és levegő) határfelületén keletkezik. Fröhlich már idézett művében fontos feladatnak tűzi ki annak a megvizsgálását, milyen rendszerek keletkeznek olyan közegek határfelületén, a melyek relativ törésmutatói az 1 és 1,5 határok között mozognak.




9. ábra.

Ezt a vizsgálatot egy egyetemi Than-féle pályázat keretében Kronstein Béla és Kronberger Ede akkori tanárjelölt urak végezték el; ezen mérések eredményét, a mit megint Fröhlich egyet. tanár úr volt szives e czélra átengedni, a jelen fejezetben fogom elméletünkkel összehasonlítani.

Előbb azonban néhány szót a kisérleti berendezésről. A mérések kivitelére egy a Zeiss jenai czégnél készült üveg-præparatum szolgált, a mely tömör üvegfélgömbből s hozzáragasztott üres üveg-félgömbhéjból állott (lásd keresztmetszetben a

9. ábrán). Az utóbbit kis nyiláson keresztül a folyadékkal lehetett megtölteni, a rácsozás pedig az előbbinek sík átlós lapjára volt húzva. Az egész præparatum minden irányban (a határfelület síkjában is) forgathatólag volt felszerelve az említett JAMIN-féle kör közepére. A mérések eredményét elméletünkkel összehasonlítva, a III. táblázaton (a 42. lapon) találjuk.

A táblázat berendezéséhez a következőket tartom szükségesnek megjegyezni: Benne $\vartheta$ jelenti a beeső fény polározási azimutját az elhajlás síkjához képest, $\omega$ az elhajlás szögét, azaz a beeső fény positiv iránya és az elhajlított sugár positiv iránya közti szöget. Miután pedig mindig a *rácsfelülettől a folyadékon át kilépő* sugarak figyeltettek meg, ennélfogva $0° \leqq \omega \leqq 90°$, a mikor a beeső fény az üvegfélgömbön át (ábránkon balról) jut a rácsozott felülethez, a megfigyelt elhajlított sugarak tehát tulajdonképen ú. n. megtörve-elhajlított sugarak, míg az $90° \leqq \omega \leqq 180°$ esetben a beeső fény a folyadékon keresztül (ábránkon jobbról) jut a rácsozott felülethez, a megfigyelt sugarak tehát a visszaverődött fénynyel vannak egy oldalon, azaz visszaverődve-elhajlított sugarak. A $\varphi_0$ jelzésű rovat tartalmazza a megfigyelt polározási azimutokat. Ez adatok első megtekintésre mutatják, hogy *egyazon sugár azimutja ugyanaz, akár töréses, akár visszaverődéses elhajlítással jött létre.*[1] Ez a körülmény hathatósan támogatja azt a feltevésünket, a mely képletünk levezetésében alapul szolgált, hogy t. i. a felületen előálló gerjedést első közelítésben csak az *ottlévő* rezgéstől tettük függővé, ellenben a beeső fény sugárirányát figyelmen kívül hagytuk. Könnyen érthető, hogy ez a feltevés éppen az egységhez közelálló törésmutatóknál van nagy pontossággal teljesítve.[2] A $\varphi_c$ rovatban a képletünkkel számított polározási azimutokat találjuk, végül a $\varphi_0 - \varphi_c$ rovatban a mért és szá-

---

[1] A 0°,1-ig terjedő egyezés persze csak annak köszönhető, hogy az *igen közel* egyező adatok középértékei vannak a táblázatba bevezetve.

[2] Egyébként v. ö. a 28. lapon tett [1] alatti megjegyzéssel.

## III. Táblázat.

| Az első közeg | | Levegő $n_D = 1,00$ | | | Viz $n_D = 1,33$ | | | Alcohol $n_D = 1,36$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| relativ törésmutató | | 1,48 | | | 1,112 | | | 1,088 | | |
| $\vartheta$ | $\omega$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ |
| 45° | ±150° | − 42°,5 | − 43°,8 | + 1°,3 | − 41°,7 | − 41°,8 | + 0°,1 | − 41°,0 | − 41°,6 | + 0°,6 |
| | ±135 | − 42,3 | − 42,5 | + 0,2 | − 37,2 | − 37,6 | + 0,4 | − 36,9 | − 37,3 | + 0,4 |
| | ±120 | − 40,7 | − 41,6 | + 0,9 | − 31,9 | − 32,4 | + 0,5 | − 31,1 | − 31,4 | + 0,3 |
| | ±105 | − 41,8 | − 42,5 | + 0,7 | − 26,1 | − 27,2 | + 1,1 | − 22,2 | − 25,2 | + 3,0 |
| | ± 75 | + 41,8 | + 42,5 | − 0,7 | + 26,1 | + 27,2 | − 1,1 | + 22,2 | + 25,2 | − 3,0 |
| | ± 60 | + 40,7 | + 41,6 | − 0,9 | + 31,9 | + 32,4 | − 0,5 | + 31,1 | + 31,4 | − 0.3 |
| | ± 45 | + 42,3 | + 42,5 | − 0,2 | + 37,2 | + 37,6 | − 0,4 | + 36,9 | + 37,3 | − 0,4 |
| | ± 30 | + 42,5 | + 43,8 | − 1,3 | + 41,7 | + 41,8 | − 0,1 | + 41,0 | + 41,6 | − 0,6 |
| | ± 15 | + 45,1 | + 44,7 | + 0,4 | + 44,4 | + 44,2 | + 0,2 | + 44,1 | + 44,1 | 0,0 |
| | 0 | + 45,3 | + 45,0 | + 0,3 | + 45,1 | + 45,0 | + 0,1 | + 45,0 | + 45,0 | 0,0 |

| Az első közeg | | Terpentin $n_D = 1,48$ | | | Szénkéneg $n_D = 1,63$ | | | Methylenjodid $n_D = 1,74$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| törésmutató relativ | | 1,00 | | | 0,91 | | | 0,85 | | |
| $\vartheta$ | $\omega$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ |
| 45° | ±150° | − 40,1 | − 40,9 | + 0,8 | − 40,0 | − 39,9 | − 0,1 | − 39,1 | − 39,1 | 0,0 |
| | ±135 | − 34,6 | − 35,3 | + 0,7 | − 32,6 | − 32,3 | − 0,3 | − 29,5 | − 29,5 | 0,0 |
| | ±120 | − 25,5 | − 26,6 | + 1,1 | − 17,6 | − 17,1 | − 0,5 | − 3,0 | — | — |
| | ±105 | − 13,2 | − 14,5 | + 1,3 | − 0,5 | — | — | − 1,5 | — | — |
| | ± 75 | + 13,2 | + 14,5 | − 1,3 | + 0,5 | — | — | + 1,5 | — | — |
| | ± 60 | + 25,5 | + 26,6 | − 1,1 | + 17,6 | + 17,1 | + 0,5 | + 3,0 | — | — |
| | ± 45 | + 34,6 | + 35,3 | − 0,7 | + 32,6 | + 32,3 | + 0,3 | + 29,5 | + 29,5 | 0,0 |
| | ± 30 | + 40,1 | + 40,9 | − 0,8 | + 40,0 | + 39,9 | + 0,1 | + 39,1 | + 39,1 | 0,0 |
| | ± 15 | + 43,1 | + 44,0 | − 0,9 | + 43,7 | + 43,8 | − 0,1 | + 42,0 | + 43,6 | − 1,4 |
| | 0 | + 44,9 | + 45,0 | − 0,1 | + 45,0 | + 45,0 | 0,0 | + 45,0 | + 45,0 | 0,0 |

mított értékek különbségét. *Ez a különbség a legtöbb esetben a mérések hibahatárán belül marad, úgy hogy ez az adatsorozat elméletünk alkalmazhatóságát — az említett korlátozásokkal — minden kétségen felül helyezi.*

Külön kell azonban most még szólanunk a *szénkénegre* és a *methylenjodidra* vonatkozó adatok ellenőrzéséről. E két esetben ugyanis a relativ törésmutató $n<1$ lévén, a totalreflexió határszögénél nagyobb $\omega$ értékekhez nem kapunk valós $\chi$ értéket, mely a

$$\frac{\sin\omega}{\sin\chi}=n$$

egyenletnek eleget tenne. Nem lesz tehát valós az az érték sem, a melyet az

$$\frac{E_p}{E_m}=\operatorname{tg}\varphi=\frac{\cos\chi}{\cos(\omega-\chi)}\operatorname{tg}\vartheta$$

képlet a $\operatorname{tg}\varphi$ számára szolgáltat. Ez a körülmény pedig — mint az az optikából ismeretes — azt jelenti, hogy a szóban forgó fény már nem lineárisan, hanem elliptikusan polározott. Ismeretes az is, hogy ha a két amplitudó-komponens viszonyát

$$\frac{E_p}{E_m}=x+iy=\rho e^{i\delta} \tag{9}$$

alakban írjuk, akkor $\rho$ jelenti a két komponens reális amplitudójának viszonyát, $\delta$ a köztük lévő fáziskülönbséget. Ezen adatokból az ellipszis jellemzői is könnyen előállíthatók.[1] Legyen (10. ábra) $\varphi'$ az ellipszis nagytengelyének hajlása a $P$ tengelyhez

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\psi$$

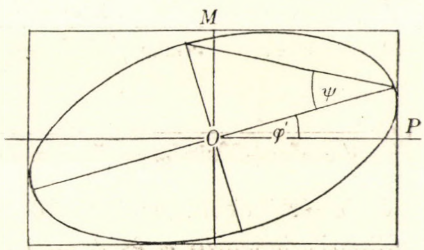
a két tengely viszonya, akkor

$$\operatorname{tg}2\varphi'=2\frac{\rho}{\rho^2-1}\cos\delta, \tag{10}$$

$$\sin 2\psi=2\frac{\rho}{\rho^2+1}\sin\delta. \tag{11}$$

[1] L. pl. VOIGT: Magnetooptik 29—30. l.

Visszatérve táblázatunk adataira, a mondottak szerint szénkénegnél $\omega=75°$-nál, methylenjodidnál $\omega=60°$ és $75°$-nál s az ezekhez szimmetrikus sugarakon elliptikus polározást kellene találnunk. Miután a megfigyelők ezt nem jelzik, ellenben a nicolon észlelhető minimumot tökéletlennek találták, azzal a közeleső feltevéssel éltem, hogy a *rezgési* ellipszis kis-tengelyét észlelték *polározási* iránynak. Ezen feltevéssel vannak kiszá-




10. ábra.

mítva a (9), ill. (10) és (11) képlet szerint a III*a*. táblázatban foglalt adatok.

**III *a)* Táblázat.**

| $\omega$ | Szénkéneg | | | | Methylenjodid | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varrho^2$ | $\varphi_0$ | $\varphi_c$ | $\varphi_0-\varphi_c$ | $\varrho^2$ |
| $\pm 120°$ | — | — | — | — | $-3{,}0°$ | $-2{,}1°$ | $-0{,}9°$ | 0,068 |
| $\pm 105$ | $-0{,}5°$ | $-2{,}1°$ | $+1{,}6°$ | 0,124 | $-1{,}5$ | $-8{,}7$ | $+7{,}2$ | 0,851 |
| $\pm 75$ | $+0{,}5$ | $+2{,}1$ | $-1{,}6$ | 0,124 | $+1{,}5$ | $+8{,}7$ | $-7{,}2$ | 0,851 |
| $\pm 60$ | — | — | — | — | $+3{,}0$ | $+2{,}1$ | $+0{,}9$ | 0,068 |

E képletek alakulása jelen esetben a következő:

$$\frac{E_p}{E_m}=\operatorname{tg}\vartheta\frac{\cos\chi}{\cos(\omega-\chi)}=\operatorname{tg}\vartheta\frac{1}{\cos\omega+\operatorname{tg}\chi\sin\omega} \qquad (12)$$

a hol

$$\sin\chi=\frac{1}{n}\sin\omega;$$

legyen továbbá:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\sin\chi}{\cos\chi} = \frac{\sin\omega}{\sqrt{n^2 - \sin^2\omega}} = -i\frac{\sin\omega}{\sqrt{\sin^2\omega - n^2}} = -ik, \tag{13}$$

akkor

$$\frac{E_p}{E_m} = \operatorname{tg}\vartheta\frac{1}{\cos\omega - ik\sin\omega} = \operatorname{tg}\vartheta\frac{\cos\omega + ik\sin\omega}{\cos^2\omega + k^2\sin^2\omega} = (x+iy)$$

és végül

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\delta = \frac{y}{x} = k\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \frac{\sin^2\omega}{\cos\omega\sqrt{\sin^2\omega - n^2}} \\ &\text{és} \\ &\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{tg}\vartheta\frac{1}{\sqrt{\cos^2\omega + k^2\sin^2\omega}} = \operatorname{tg}\vartheta\frac{1}{\cos\omega\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ezekből a $\rho$ és $\delta$ értékekből azután (10) és (11) szerint számítjuk ki az ellipszist jellemző $\varphi$ és $\psi$ adatokat, megjegyezvén, hogy $\varphi$ a kis tengely hajlását jelenti, melyre azonban

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi'$$

áll fönn.

Ha az ilyen módon számított azimutokat az észlelt adatokkal összevetjük, azt látjuk, hogy a megegyezés igen jó a *methylenjodidnál* $\omega = 60°$ esetén, mikor a számítás szerint is az ellipszis igen lapos ($\rho^2 = 0{,}068$) kevésbbé jó a *szénkéneg* $\omega = 75°$ esetén, a hol az ellipszis domborúbb ($\rho^2 = 0{,}124$) s egészen rossz a *methylenjodid* $\omega = 75°$ esetben, a mikor azonban a számítás közel közösen poláros fényt ad ($\rho^2 = 0{,}851$), a mikor tehát egy bizonyos polározási azimutról még közelítőleg sem lehet beszélni.

7. §. Az elmélet és kisérlet folytatólagos egybevetése merőleges beesésnél levegő-üveg határfelületén az üvegbe elhajlított fényt illetőleg. Az elmélet fényes igazolást nyer a teljes visszaverődés határszögénél tett megfigyelésekkel. Fázis ugrás, ha a beeső fény síkban poláros; tökéletes síkban polározás, ha a beeső fény természetes.

Ebben a §-ban a levegő-üveg határfelületén töréses vagy visszaverődéses elhajlítással létrejövő, de mindig az üvegbe lépő elhajlított sugarakról lesz szó.

Ezen sugarakra vonatkozólag qualitativ adatokat FRÖHLICH már i. m. 79. §-ában közöl.[1] E szerint akár az üveg, akár a levegő oldaláról esik merőlegesen a rácsfelületre síkban polározott fény, az üvegbe elhajlított sugarak közül a direkt átmenőhöz közel haladók szintén síkban polárosak s polározási állapotuk közel isogonális, de már a jobban elhajlított sugarak elliptikusan polározottak, sőt majdnem körösen polározottak is lehetnek, a mint arról BABINET-féle kompensátorral könnyen meggyőződhetni.

FRÖHLICH egyetemi tanár úr szives szóbeli közléséből volt tudomásom újabb, főleg KURDILLA tanárjelölt közreműködésével végzett vizsgálatainak azon nevezetes eredményéről, hogy a mint a szóban forgó elhajlított sugarakat BABINET-kompensátorral vizsgálva, mind jobban elhajlított sugarakat figyelünk meg, *egy bizonyos szögnél a kompensátor sötét csíkja jóformán ugrásszerűen tolódik el*, azaz ennél a szögnél az elhajlított fényvektor két komponense — az elhajlás síkjával $\parallel$ és reá $\perp$ komponens — között ugrásszerűen tetemes fáziskülönbség lép fel.

Fenti képleteink taglalása közben csakhamar felismertem, hogy ez az eredmény belőlük közvetlenül kiolvasható, egyszersmind az is, hogy ez *a fázisugrás a teljes visszaverődés határszögénél következik be.* Valóban, a míg $\omega$ ennél kisebb, addig a $\operatorname{tg}\varphi$ valós, az elhajlított fény síkban poláros; azon túl a $\operatorname{tg}\varphi$ képzetes, az elhajlított fény elliptikusan poláros; a két komponens közti fáziskülönbség pedig ennél a szögnél ugrásszerűen veszi fel a $\frac{\pi}{2}$ értéket,[2] a (14) szerint

$$\operatorname{tg}\delta = \infty$$

[1] Ezek a megfigyelések vékony planparallel üveglemezre készült rácscsal történtek, a mely a lemez sima, rácsozatlan felével ugyanakkora törésmutatójú üvegfélgömb átmérőlapjára volt ragasztva.

[2] Igen kézzelfogható módon teszi szemlélhetővé ezt a fázisugrást az interferentia-csíkoknak megtörése ennél a szögnél, ha a BABINET úgy állítjuk a megfigyelő cső elé, hogy az interferentia-csíkok az elhajlás síkjában tehát vízszintesen feküdjenek.

lévén, ha

$$\sin \omega = n.$$

De a mi képletünkből még több is kiolvasható. Ugyanis ha

$$\operatorname{tg} \delta = \infty,$$

akkor akármilyen $\vartheta$ értéknél is, ha csak

$$\operatorname{tg} \vartheta \neq \infty$$

mindig

$$\rho = 0,$$

azaz: *akármilyen azimutban legyen is lineárisan polározva a levegő-üreg határfelületére merőlegesen beeső fény, az üvegből a teljes visszaverődés határszöge alatt kilépő sugarak mind az elhajlás síkjában vannak polározva;* (egyúttal közülök a beeső fény polározási síkjára merőlegesen elhajlított két sugárnak, melyekre $\operatorname{tg} \vartheta = \infty$, intenzitása zérus).

Ugyanez a következtetés érvényes akkor is, ha a beeső fény természetes állapotú. Nevezzük FRÖHLICH tanár úr után *elválasztó kúp*nak a rácsnak üvegbe mutató normálisa mint tengely körül a teljes visszaverődés határszögével, mint félnyílásszöggel leírt kúpfelületet, akkor ez utóbbi eredményünket így mondhatjuk ki: *Ha rácsozott üvegfelületre merőlegesen — akár az üveg, akár a levegő oldaláról — természetes fény esik, az üveganyagban, az elválasztó kúp mentén haladó elhajlított sugarak mind teljesen síkban polározvák, polárosságuk síkja pedig a mindenkori elhajlási sík.*

Mind e következtetéseket fényesen igazolták azok a megfigyeléseim, a melyeket egy átlós lapján rácsozott 1,62 törésmutatójú üvegfélgömbön végeztem.[1] Két dolgot azonban meg kell említenem. Egyrészt, hogy e következtetésekre nem *tisztán* elméleti úton jutottam, másrészt, hogy bármilyen híven adják is vissza képleteink az elválasztó kúp jelenségét, mégis nem

[1] Ezt az üvegfélgömböt szintén FRÖHLICH tanár úr szivességének köszönöm.

bizonyos, hogy a szóban forgó egész sugárrendszert ily pontosan leírják. Legalább néhány qualitativ megfigyelés e tekintetben kétséget keltett bennem.

Nem is volna meglepő, ha ennél az egységnél jóval kisebb $n = \frac{1}{1{,}62} = 0{,}62$ törésmutatónál képletünk a valóságot ép úgy nem adná teljesen híven vissza, mint a hogy az egységnél jóval nagyobb $n = 1{,}62$ törésmutatónál s ezentúl *valószínűleg* szintén nem követi teljesen a valóságot.

## 8. §. Levegőbe visszaverődve-elhajlított fényrendszerek általánosabb esetei. Nem merőleges beesés; közelítő egyezés a tapasztalattal a beesés síkjában polározott fény esetén. Az eltérések értelmezése; az elmélet bővítésének iránya. Összefoglalás.

A tárgyalásaink elején jelzett korlátozással eddig kizárólagosan a merőleges beesés esetével foglalkoztunk. Most még egész röviden annak a megbeszélésére óhajtok kitérni, mit mond elméletünk általánosabb esetekben, hogyan kell esetleg bővíteni ezeknek leírása céljából.

Legközelebb eső általánositásnak kell tekintenünk azon eseteket, a mikor a beesés szöge nem zérus ugyan, de a beeső fény mindig a beesés síkjában van polározva. A Fröhlich-féle törvények szerint ugyanis a polározási síkok eloszlása levegőben, ezekben az esetekben is még mindig nagy megközelítéssel isogonális.

Elméletünkben, mint már többször kiemeltük, csupán a felületen rezgő elektromos erő iránya szerepel, mint az egész elhajlított sugár-rendszer meghatározó adata. Ez *az irány pedig változatlan marad, akárhogyan változtassuk is a beesés síkjában polározott fény beesési szögét;* tehát az elhajlított sugárrendszernek is változatlannak kellene maradni. Első közelítésben ez — mint mondtuk — így is van, azonban nagyobb beesési szögeknél már az isogonalitástól is, elméletünktől is nagyobb eltérések vannak, semhogy akár az egyikkel, akár a másikkal pontosabb leíráshoz beérhetnők. Ezek a tények félreismerhetetlenül ismét arra mutatnak, hogy e fényelhajlási jelenségeknél a fényvektoron (elektromos vektoron) kívül annak normálismenti differencziálhányadosa is irányadó szerepet játszik. Ebben az utóbbiban jelentkezik éppen a beeső fénysugár *iránya*, a mely pedig minden fényelhajlási tüneménynél többé vagy kevésbbé, de figyelembe veendő. Ugyanerre az eredményre más meggondolásokkal is eljuthatunk.

A homogén közegben történő fényelhajlás (fényszóródás) circumaxiális *polározási állapotát* Rayleigh egy dielektromos golyóból kiinduló sugárzással állítja elő. De ez utóbbinak intenzitás-eloszlása is circumaxiális, míg a szétszórt fény intenzitás-eloszlásában az átmenő fény iránya mint kitüntetett irány szerepel.

Ez a mi vektor-rendszerünk, a mely a Rayleigh-féle egyszerű circumaxiálisból van összerakva, úgy értelmezhető, mint két különböző közeg határfelületén elhelyezett dielektromos gömböcskéből reáeső elektromos hullám hatására kiinduló sugárzás. Az összerakás módja folytán az intenzitás-viszonyok nálunk a polározási állapotra is befolyást gyakorolnak, érthető tehát, hogy ez az egyszerű kép általánosabb esetekben a polározási viszonyokat sem adja híven vissza. A mellett azonban maga a felfogásmód — mint arról számos különböző esetben meggyőződtem — a legáltalánosabb esetben is közelítőleg tájékoztat a várható jelenségek természetéről.

## Összefoglalás.

1. Az első fejezetekben áttekintettük az üvegrácsokon történő fényelhajlás kisérleti és elméleti ismeretének jelenlegi állását, különös gondot fordítva a megfigyelés módjának és tárgyának pontos körvonalazására.

2. A Stokes-féle elmélet közvetlen általánosításaképen a két közeg határfelületén történő fényelhajlásról oly felfogást fejtettünk ki, melynek értelmében a fényelhajlás a felület két oldalán, bár hozzá végtelen közelfekvő centrumokon jön létre

(mint egyszerű circumaxiális gerjedés) s a megfigyelhető elhajlított fény e centrumokból kiinduló közvetlenül, továbbá visszaverődés, ill. törés útján a szembe jutó hullámok eredője.

3. Ezt a felfogást a merőleges beesésre vonatkozólag mathematikai formába öntöttük s megmutattuk, hogy e formulával nemcsak az eddigi megfigyelések állíthatók elő nagy pontossággal, hanem hogy általa új, eddig nem ismeretes jelenségek felismerésére is juthatni.

4. Végül megpróbáltuk az elmélet eddigi hiányait értelmezni s a fényelhajlás természetének általános vonásait tartva szem előtt, kijelölni az elmélet továbbfejlesztésének valószinű útját.

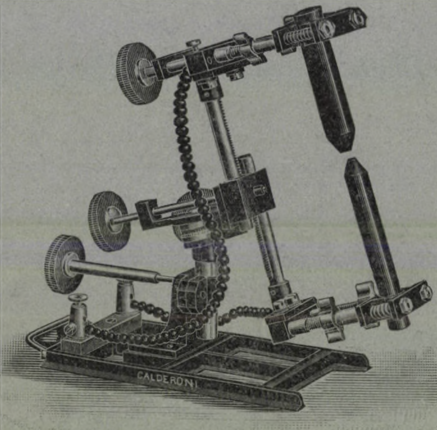
*Selényi Pál.*

# Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.




**Elektromos ívlámpa** legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

**Elektromos ívlámpa** egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

**Borszesz-izzófénylámpa** légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

**Háromlábu asztalállvány,** mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110.**—

**Vetitési ernyő** finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

**Ernyő-állvány** fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30.**—

**Vetitési ernyők** zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 200 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 cm. négyzetben |
| Ára | **45.**— | **65.** - | **90.**— | **145.**— | **200.**— | **240.**— korona. |

**Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.**

*Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.*

Franklin-Társulat nyomdája

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV

TIZENKILENCZEDIK ÉVFOLYAM

VII. FÜZET 1910 NOVEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1910.

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A tizenkilenczedik társulati év 1910 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János-utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

*Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.*

**Rendes ülések.** A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

*Igen tisztelt munkatársainkat* értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

---

**☞ A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

# A VARIÁCZIÓSZÁMÍTÁS DIFFERENCZIÁL-EGYENLETEIRŐL.

Egyszeres integrálokra vonatkozó variácziószámítási feladatok tárgyalása mindig két részre oszlik. Először olyan vonalakat kell keresni, a melyek eleget tesznek a variácziószámítás differencziálegyenleteinek és a melyeknek mentén az integrál szélső értéket *vehet* fel; az ilyen vonalakat KNESER példájára *extremálvonalak*nak fogjuk nevezni. Másodszor meg kell vizsgálni, hogy egy bizonyos, a kisérő feltételeknek megfelelő extremálvonal az integrálnak csakugyan szélső értékét szolgáltatja-e. A következő fejtegetések csak az első kérdésre vonatkoznak, a mennyiben a differencziálegyenletek általános elméletéből adódó existentia-tételnek a variácziószámítás czéljaira hasznos átalakításáról fognak szólni.

**1.** Induljunk ki a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{1}$$

differencziálegyenletekből, a melyek az

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x,\,y,\,z,\,x',\,y',\,z')\,dt \tag{2}$$

$$\left(x'=\frac{dx}{dt},\quad y'=\frac{dy}{dt},\quad z'=\frac{dz}{dt}\right)$$

integrálhoz tartozó extremálvonalakat határozzák meg. Fel fogjuk tenni, hogy

$$F(x, y, z, kx', ky', kz') = kF(x, y, z, x', y', z') \qquad (3)$$

bárminő pozitiv számot jelentsen is $k$ (ez biztosít bennünket arról, hogy a (2) integrál nem függ a $t$ paraméter választásától), továbbá egyszerűség kedvéért azt is, hogy az $F$ függvény analitikai, ha

1. az $(x, y, z)$ pont a tér egy bizonyos $R$ tartományában van és
2. $x'^2+y'^2+z'^2 \neq 0$.

Bizonyos feltételek mellett, a melyeknek részletezésére nincs szükségünk, az $R$ tartomány minden *belső* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pontján adott tetszésszerinti kezdeti irányban (azaz $x'$, $y'$, $z'$ számára megadott kezdeti értékekkel) egy és csak egy extremálvonal megy keresztül.[1]

Ugyanezen feltételek mellett, *az $R$ tartomány minden belső $R_1$ tartományára nézve találhatunk oly két pozitiv $r$ és $l$ számot, hogy ha az $R_1$ két tetszésszerinti $P_0$ és $P$ pontjának távolsága $r$-nél kisebb, akkor a $P_0$ ponttól a $P$ pontig egy és csak egy olyan extremálvonalat vezethetünk, a melynek hossza kisebb mint $l$.*

A következőkben ezt a tételt fogjuk bebizonyitani olyan módszer segítségével, a mely változtatás nélkül alkalmazható mind a sík, mind pedig akárhány dimenziós tér (azaz akárhány ismeretlen függvény) esetére is.

*

**2.** Lássuk először, mik a feladat nehézségei. Az $(x_0, y_0, z_0)$ ponton átmenő extremálvonalakat három ilyen alakú egyenlettel állíthatjuk elő:

---

[1] Az olyan extremálvonalakat, a melyek paramétertranszformáczióval származtathatók egymásból, azonosaknak tekintjük.

$$\begin{aligned} x &= f(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'), \\ y &= \varphi(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'), \\ z &= \psi(t, x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'), \end{aligned} \tag{4}$$

a hol $x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'$ az $x, y, z, x', y', z'$ változók kezdeti értékeit jelentik $t=0$ esetére. Feltehetjük, hogy a $t$ paraméter arányos az extremálvonalnak $P_0$-tól előjellel számított ívhosszúságával és hogy az arányossági tényező, a melyet $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$-val jelölünk, mindegyik extremálvonalon ugyanaz. Az (1) egyenletek ugyanis nem függetlenek egymástól, mert baloldaliakat rendre $I_x, I_y, I_z$-vel jelölvén, látjuk, hogy

$$\begin{aligned} x'I_x+y'I_y+z'I_z &= \sum x' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \sum x' \frac{\partial F}{\partial x} = \\ &= \frac{d}{dt} \sum x' \frac{\partial F}{\partial x'} - \sum\left(x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + x' \frac{\partial F}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{d}{dt}\left[x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'} - F\right] \end{aligned}$$

(a $\sum$ jel $x, y, z$-re kiterjedő szummácziót jelent); a (3) feltételnek pedig közvetlen folyománya, hogy

$$x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'} = F,$$

tehát

$$x'I_x+y'I_y+z'I_z = 0.$$

Ennek alapján jogunk van az (1) egyenletcsoporthoz egy új egyenletet csatolni, a melyet így választunk:

$$x'x''+y'y''+z'z'' = 0. \tag{1)'}$$

Ez az új egyenlet a következő integrált szolgáltatja

$$x'^2+y'^2+z'^2 = x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2 = \text{const.},$$

és ha bevezetjük az

$$x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2 = \rho \tag{5}$$

feltételt, akkor ezáltal a $t$ paramétert a kivánt módon és egyúttal az $f, \varphi, \psi$ függvényeket is teljesen meghatároztuk.

Ha a $P_0$ pont helyét nem változtatjuk, akkor $f$, $\varphi$, $\psi$ négy változótól $t$, $x'_0$, $y'_0$, $z'_0$-től függnek, mely négy változó az (5) feltételnél fogva háromra redukálódik.

Feladatunk az, hogy e három változót megfordítva, mint $x$, $y$, $z$ függvényét fejezzük ki, a mikor a $P(x, y, z)$ pont elég közel van a $P_0$ ponthoz. E czélra azonban az impliczit függvényekről szóló klasszikus tételt nem alkalmazhatjuk, mert hiszen $t=0$ esetére mind e kilencz differencziálhányados

$$\frac{\partial f}{\partial x'_0}, \frac{\partial f}{\partial y'_0}, \frac{\partial f}{\partial z'_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x'_0}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial z'_0}$$

értéke zérus. Szemléletesebb alakban fejezve ki a dolgot, azt mondhatjuk, hogy a (4) egyenletekkel ábrázolt vonalseregnek a $P_0$ pontban szingularitása van, mert e helyen a sereg minden vonala összefut, tehát nem várhatunk kölcsönös és egyértelmű vonatkozást egy a $P_0$-t magábazáró tartomány *összes* pontjai és a $Q(t, x'_0, y'_0, z'_0)$ pontok között (mindig az $x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2=\rho$ feltétellel), hiszen az egyetlen $P_0$ pontnak végtelen sok $Q$ pont felel meg.

A tételt $n=2$ esetére ($n$-nel jelölvén az ismeretlen függvények számát) Bliss [1] olyan módszerrel bizonyítja be, melynek gondolatmenete még Weierstrasstól [2] származik; e módszer azonban nem általánosítható arra az esetre, a mikor $n>2$.

Bolza [3] a sík polárkoordinátáinak bevezetésével kerüli el a nehézséget. A polárkoordinátavonalak egyik serege ugyanis éppen olyan szingularitású, mint az egy pontból kiinduló extremálvonalak serege. De ez csak a síkban van így; a térbeli polárkoordináták egyike nemcsak egy pontban, hanem egy egyenes (az $Oz$ tengely) mentén válik határozatlanná és ez a szingularitás nem képezhető le az extremálvonalak seregének szingularitására.

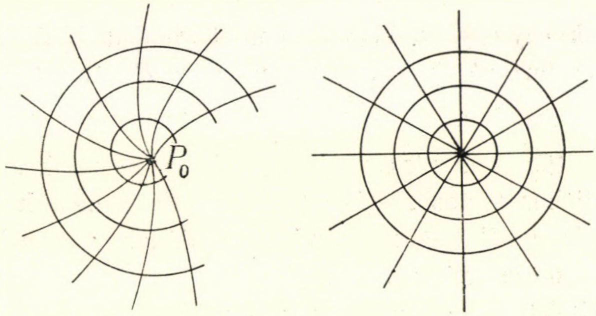
---

[1] *Bulletin of the American Mathematical Society*, 13. k. (1907), 321. l.

[2] Bolza szerint, l. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, 272. l.

[3] Bolza id. h. 270. l.

HADAMARD[1] módszerének lényege (tetszésszerinti $n$ esetére) az, hogy nagyszámú derékszögű koordinátatranszformácziót végzünk és mindegyik transzformáczió után az egyik koordinátát választjuk paraméternek. E módszer igen hosszadalmas.




1. ábra.

Az itt vázolandó bizonyítás egyrészt a (nem DESCARTES-féle) koordinátarendszer alkalmas megválasztásán, másrészt az impliczit függvényekről szóló tétel BOLZA-féle általánosításán[2] alapszik.

*

**3.** A BOLZAtól származó általánosított tétel egyszerűbb alakja így hangzik:

Legyenek

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

folytonos első differencziálhányadosokkal ellátott függvények valamely $A$ tartományban, $C$ egy az $A$ *belsejében*[3] fekvő kor-

[1] HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations.* (Paris, Hermann, 1910), I. k. 114–122. és 497–511. l.

[2] *Mathematische Annalen,* 63. k. (1907), 247. l. és BOLZA, *Vorlesungen,* 160. l. BOLZA maga is felhasználja ezt az általánosítást a kérdéses tételnek $n=2$ esetre való bebizonyításában.

[3] Ezen azt értjük, hogy a $C$ halmaznak minden $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ pontja körülvehető egy oly elég kicsiny «koczkával»: $|x_i - x_i^0| \leq \delta$, $(i=1, \ldots, n)$, a mely teljesen az $A$ tartományban fekszik.

látos és zárt halmaz, a melynek minden $(x_1, \ldots, x_n)$ pontjához az

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots \\ y_n &= f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{I}$$

egyenletek egy-egy $(y_1, \ldots, y_n)$ pontot rendelnek. A $C$ összes pontjaihoz tartozó $(y_1, \ldots, y_n)$ pontok egy $\Gamma$ halmazt alkotnak.

Felteszszük, hogy a $\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ függvénydetermináns a $C$ egy pontján sem zérus; továbbá, hogy nemcsak a $C$ minden pontjához tartozik a $\Gamma$-nak egy pontja, hanem, hogy megfordítva is, a $\Gamma$ halmaz minden pontjához a $C$ halmaznak csak egy pontja tartozik.

E feltételek mellett van oly $r$ szám, hogy az

$$|y_1 - y_1^0| \leqq r, \ldots, |y_n - y_n^0| \leqq r \tag{$\Gamma$}_r$$

egyenlőtlenségekkel [a melyekben $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$ a $\Gamma$ halmaz akármelyik pontját jelenti] meghatározott $(\Gamma)_r$ halmaz minden pontjához az (I) egyenletek egyetlenegy $(x_1, \ldots, x_n)$ értékrendszert rendelnek. Vagy más szóval: az $x_1, \ldots, x_n$ változók nemcsak a $\Gamma$, hanem a $(\Gamma)_r$ tartományban is egyértékű (és folytonos első differencziálhányadosokkal ellátott) függvényei az $y_1, \ldots, y_n$ változóknak.

*

**4.** Forduljunk vissza a (4) egyenletekhez és tegyük fel egyelőre, hogy az $(x_0, y_0, z_0)$ pont fix helyzetű. A következőkben mindig felteszszük, hogy a mikor

$$x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = 1, \tag{5}'$$

az $f$, $\varphi$, $\psi$ függvények regulárisak a

$$-\tau \leqq t \leqq \tau$$

intervallumban és

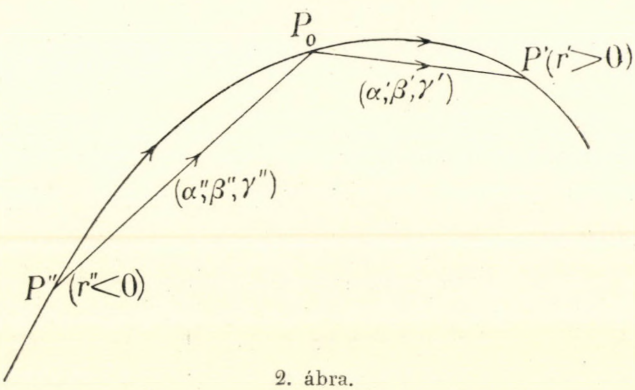
$$(f - x_0)^2 + (\varphi - y_0)^2 + (\psi - z_0)^2 > 0,$$

ha

$$0 < |t| \leqq \tau.$$

*Feladatunk a (4) és (5)' egyenleteket megoldani* $t$, $x_0'$, $y_0'$, $z_0'$*-re nézve, ha megadják a* $P(x, y, z)$ *pontot.*

E czélból a $P$ pont helyét *négy* számértékkel fogjuk meghatározni, a melyek közül három és pedig $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ azon vektor iránycosinusaival arányosak, a mely a $P_0$ és $P$ pontokat összeköti abban az irányban, mely az extremálvonalon a $t$ paraméter növekedő értékeinek megfelel; és a negyedik számérték $r$ e vektor hosszúságát jelenti *plus* vagy *minus* jellel, a szerint a mint az az extremálvonal, melyet $P$-n át akarunk vezetni, $P_0$-tól halad $P$ felé vagy megfordítva. Ilyen módon egy-egy




2. ábra.

extremálvonal pontjainak *mind a négy* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $r$ koordinátája folytonosan változik és $r$ olyan jelű, mint $t$. A geometriai tér minden $(x, y, z)$ pontjához tulajdonképen két pont fog tartozni:

$$(\alpha, \beta, \gamma, r) \quad \text{és} \quad (-\alpha, -\beta, -\gamma, -r)$$

megfelelően annak a két esetnek, hogy egyszer a $P_0$-tól kiindulva akarunk $P$ felé extremálvonalat vezetni, másszor megfordítva. Egyébként

$$x-x_0 = \frac{\alpha}{\lambda} r, \qquad y-y_0 = \frac{\beta}{\lambda} r, \qquad z-z_0 = \frac{\gamma}{\lambda} r, \tag{6}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \lambda^2 \; (\lambda>0).$$

E négy változóhoz $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $r$-hez már most még egy ötödiket fogunk csatolni, $\rho$-t és megmutatjuk, hogy *a transzformált egyenletek:*

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\lambda(f-x_0)}{\sqrt{(f-x_0)^2+(\varphi-y_0)^2+(\psi-z_0)^2}} &= \alpha,\\
\frac{\lambda(\varphi-y_0)}{\sqrt{(f-x_0)^2+(\varphi-y_0)^2+(\psi-z_0)^2}} &= \beta,\\
\frac{\lambda(\psi-z_0)}{\sqrt{(f-x_0)^2+(\varphi-y_0)^2+(\psi-z_0)^2}} &= \gamma,\\
\sqrt{(f-x_0)^2+(\varphi-y_0)^2+(\psi-z_0)^2} &= r,\\
x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2 &= \rho
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

Bolzanak *imént idézett tétele értelmében az*

$$x_0', \ y_0', \ z_0', \ t, \ \lambda$$

*változókra nézve megoldhatók.*

A (7) egyenletek baloldalai ugyanis regulárisak ebben az $A$ tartományban:

$$
\begin{aligned}
&1-\delta \leqq x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2 \leqq 1+\delta,\\
&-\tau' \leqq t \leqq \tau' \left(\tau' = \frac{\tau}{1+\delta}\right),\\
&-\infty<\lambda<+\infty
\end{aligned} \tag{$A$}
$$

és e $C$ tartomány:

$$x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2=1, \quad t=0, \quad \lambda=1 \tag{$C$}$$

az $A$-nak belsejében fekszik.

A (7) egyenletek a $C$ tartomány pontjaihoz a következő $\Gamma$ tartomány

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad r=0, \quad \rho=1 \tag{$\Gamma$}$$

pontjait rendelik és a megfelelés kölcsönösen egyértelmű, minthogy

$$\alpha=x_0', \quad \beta=y_0', \quad \gamma=z_0', \quad r=0, \quad \rho=1,$$

és megfordítva

$$x_0'=\alpha, \quad y_0'=\beta, \quad z_0'=\gamma, \quad t=0, \quad \lambda=1.$$

Végre a

$$\Delta = \frac{D(\alpha, \beta, \gamma, r, \rho)}{D(x'_0, y'_0, z'_0, t, \lambda)}$$

*függvénydetermináns a C tartomány egyetlen helyén sem zérus,* a mint ezt mindjárt részletesen igazolni fogjuk.

Tehát alkalmazhatjuk BOLZA tételét, a melynek értelmében *a* (7) *egyenletek az*

$$x'_0, y'_0, z'_0, t, \lambda$$

*változókra nézve megoldhatók, ha az*

$$\alpha, \beta, \gamma, r, \rho$$

*változók a következő*

$$1-\varepsilon \leqq \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \leqq 1+\varepsilon, \quad |r| \leqq r_0, \quad 1-\varepsilon \leqq \rho \leqq 1+\varepsilon$$

*tartományból valók és annál inkább, ha* $\alpha, \beta, \gamma, r, \rho$ *e megszorítóbb feltételeknek tesznek eleget*

$$-r_0 \leqq r \leqq r_0, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad \rho=1. \qquad (\Gamma')$$

A $\Gamma'$-nek megfelelő $C'$ tartományban

$$x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2=1, \quad \lambda=1$$

és

$$|t| \leqq l;$$

ebben az esetben $t$ már a $P_0$ ponttól előjellel számított ívhosszúságot jelenti.

*

**5.** Hátra van még a $\Delta$ függvénydetermináns kiszámítása.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{r}\frac{\partial f}{\partial x'_0} - \frac{\lambda}{r^2}(f-x_0)\frac{\partial r}{\partial x'_0} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial x'_0} & 2x'_0 \\ \frac{\lambda}{r}\frac{\partial f}{\partial y'_0} - \frac{\lambda}{r^2}(f-x_0)\frac{\partial r}{\partial y'_0} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial y'_0} & 2y'_0 \\ \frac{\lambda}{r}\frac{\partial f}{\partial z'_0} - \frac{\lambda}{r^2}(f-x_0)\frac{\partial r}{\partial z'_0} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial z'_0} & 2z'_0 \\ \frac{\lambda}{r}\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\lambda}{r^2}(f-x_0)\frac{\partial r}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial r}{\partial t} & 0 \\ \frac{f-x_0}{r} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Minthogy

$$\frac{\partial r}{\partial x_0'} = \frac{f-x_0}{r}\frac{\partial f}{\partial x_0'} + \frac{\varphi-y_0}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial x_0'} + \frac{\psi-z_0}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x_0'},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

tehát

$$\Delta = \frac{2\lambda^2}{r^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0'} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_0'} & \frac{\partial \psi}{\partial x_0'} & x_0' \\ \frac{\partial f}{\partial y_0'} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_0'} & \frac{\partial \psi}{\partial y_0'} & y_0' \\ \frac{\partial f}{\partial z_0'} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_0'} & \frac{\partial \psi}{\partial z_0'} & z_0' \\ \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} & 0 \end{vmatrix}$$

Fejtsük ki az $f$, $\varphi$, $\psi$, $r$ függvényeket $t$ hatványai szerint haladó sorba; ekkor

$$\begin{aligned} f &= x_0+tx_0'+t^2(\ldots), \\ \varphi &= y_0+ty_0'+t^2(\ldots), \\ \psi &= z_0+tz_0'+t^2(\ldots), \\ r &= t\sqrt{\rho}+t^2(\ldots), \end{aligned}$$

és így

$$\Delta = \frac{2\lambda^2}{\rho t^2(1+\cdots)}\begin{vmatrix} t+t^2(\ldots) & t^2(\ldots) & t^2(\ldots) & x_0' \\ t^2(\ldots) & t+t^2(\ldots) & t^2(\ldots) & y_0' \\ t^2(\ldots) & t^2(\ldots) & t+t^2(\ldots) & z_0' \\ x_0'+t(\ldots) & y_0'+t(\ldots) & z_0'+t(\ldots) & 0 \end{vmatrix}$$

A jobboldalon szereplő determináns, ha első három sorát $t$-vel osztjuk és utolsó oszlopát $t$-vel szorozzuk, így írható:

$$t^2\begin{vmatrix} 1+t(\ldots) & t(\ldots) & t(\ldots) & x_0' \\ t(\ldots) & 1+t(\ldots) & t(\ldots) & y_0' \\ t(\ldots) & t(\ldots) & 1+t(\ldots) & z_0' \\ x_0'+t(\ldots) & y_0'+t(\ldots) & z_0'+t(\ldots) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -t^2(x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2)+t^3(\ldots),$$

tehát

$$\Delta = -2\lambda+t(\ldots).$$

Ennélfogva a $C$ tartományban

$$\Delta = -2.$$

Ezzel a kijelentett tételt — fix helyzetű $(x_0, y_0, z_0)$ pont esetére — bebizonyítottuk.

Sőt valamivel többet is bebizonyítottunk, mint a mennyit a tétel ebben az esetben állít.

Azt t. i., hogy nemcsak minden, a $P_0$ elég kis környezetében levő $P$ ponthoz lehet $P_0$-ból kiindulva extremálvonalat vezetni (melynek hossza legfeljebb $l$), hanem megfordítva $P$-ből is vezethetünk extremálvonalat a $P_0$ pont felé.

*

**6.** Most még ki kell terjesztenünk eredményeinket arra az esetre, a mikor a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont egy tartománynak tetszésszerinti helyét foglalhatja el. E czélból az impliczit függvények tételének BOLZA-féle általánosítását a következő teljesebb alakban[1] kell használnunk:

Legyenek

$$f_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

első differencziálhányadosaikkal együtt folytonos függvények az $m+n$ dimenziós $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ tér valamely $A$ tartományában és $C$ zárt, korlátos halmaz az $A$ tartomány *belsejében.*

Felteszszük, hogy a $C$ minden pontján az $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$ változók eleget tesznek ezen $n$ számú

$$f_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)} \tag{II}$$

egyenletnek; továbbá, hogy a $C$ tartományban a (II) egyenletek $y_1, \ldots, y_n$-re nézve *egyértelműen* megoldhatók, a min azt értjük, hogy ha a $C$ tartományban fennállanak ezek az

$$f_i(x_1, \ldots, x_m, y'_1, \ldots, y'_n) = 0,$$
$$f_i(x_1, \ldots, x_m, y''_1, \ldots, y''_n) = 0, \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

[1] *Math. Annalen,* 63. k. (1907), vagy BOLZA, *Vorlesungen,* 167. l.

egyenletek, akkor ezekből

$$y'_1 = y''_1, \ldots, y'_n = y''_n$$

következik.

Végre felteszszük, hogy a

$$\Delta = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$$

függvénydetermináns $C$-ben sehol sem zérus.

Ekkor lehet találni olyan $r$ számot, hogy az

$$|x_1 - x_1^0| \leqq r, \ldots, |x_m - x_m^0| \leqq r \qquad (\Gamma)_r$$

egyenlőtlenségekkel (a melyekben $x_1^0, \ldots, x_m^0$ a $C$ egy tetszésszerinti pontjának $m$ első koordinátáját jelentik) definiált $(\Gamma)_r$ tartomány minden pontjához a (II) egyenletek egy és csak egy $y_1, \ldots, y_n$ értékrendszert rendelnek. Ezen $y_1, \ldots, y_n$ értékek az $x_1, \ldots, x_m$ változók $(\Gamma)_r$ tartományában folytonos első differencziálhányadosokkal ellátott függvények.

Ezek után hozzáfoghatunk a (4) és (5)' egyenletek megoldásához abban az esetben, a mikor a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pont egy, az $R$ belsejében fekvő $R'$ tartomány akármelyik helyén van. Felteszszük, hogy $\tau$-nak (l. 4. §.) adhatunk olyan állandó értéket, mely független a $P_0$-nak $R'$-ben elfoglalt helyétől.

Vessük még alá $P_0$-t annak a feltételnek, hogy egy az $R'$ belsejében fekvő — egyébként $R'$-től és így $R$-től tetszésszerinti kevéssel eltérő — $R_1$ tartományban maradjon és alkalmazzuk Bolza második tételét a (7) egyenletekre, a melyeket most inkább ilyen alakban írunk:

$$\frac{\lambda(f - x_0)}{\sqrt{(f-x_0)^2 + (\varphi - y_0)^2 + (\psi - z_0)^2}} - a = 0.$$

. . . . . . . . . . . . . . .

Ezen egyenletek baloldalai első differencziálhányadosaikkal együtt folytonosak a következő $A$ tartományban:

$$\left.\begin{array}{l} \text{az } (x_0, y_0, z_0) \text{ pont } R'\text{-ben van,} \\ 1 - \delta \leqq x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 \leqq 1 + \delta, \quad |t| \leqq \tau', \quad 0 < \lambda, \\ a, \beta, \gamma, r, \rho \text{ akármilyen értékűek.} \end{array}\right\} \qquad (A)$$

Ez a $C$ tartomány pedig

$$\left.\begin{array}{l} \text{az } (x_0, y_0, z_0) \text{ pont } R_1\text{-ben van} \\ x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2=1, \quad t=0, \quad \lambda=1 \\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad r=0, \quad \rho=1 \end{array}\right\} \qquad (C)$$

$A$-nak belsejében fekszik. Ha az előbb idézett BOLZA-tételt alkalmazni akarjuk, akkor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ szerepét a $\rho$, $r$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $x_0, y_0, z_0$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ szerepét a $\lambda$, $t$, $x_0', y_0', z_0'$ változókra kell ruháznunk. Az összes felsorolt feltételek teljesítve vannak és ezzel a kitűzött tételt egész általánosan bebizonyítottuk.

*

**7.** Eddig a háromdimenziós tér vagy jobban mondva három ismeretlen függvény esetére szorítkoztunk. Ugyanezen a módon tárgyalható az $n$ ismeretlen függvényt tartalmazó

$$\int_{t_1}^{t_2} F\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right) dt$$

integrál. A $F(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$ függvényről természetesen ugyanolyan feltevéseket kell tennünk, mint $F(x, y, z, x', y', z')$-ről.

Az (1) és (1)' egyenletek helyét most a következő $n+1$ számú

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$x_1'x_1''+\cdots+x_n'x_n'' = 0$$

egyenlet foglalja el és a (4) egyenletek helyett ezekkel van dolgunk:

$$x_i = f_i(t, x_{10}, \ldots, x_{n0}, x_{10}', \ldots, x_{n0}'), \tag{4'}$$

melyeket a

$$\frac{\lambda(f_i - x_{i0})}{\sqrt{(f_1-x_{10})^2+\cdots+(f_n-x_{n0})^2}} = a_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{7'}$$

$$\sqrt{(f_1-x_{10})^2+\cdots+(f_n-x_{n0})^2} = r,$$

$$x_{10}'^2+\cdots+x_{n0}'^2 = \rho$$

egyenletekkel helyettesítünk ($x_{i0}$ és $x'_{i0}$ az $x_i$ és $x'_i$ értékeit jelentik $t=0$ esetére). Most

$$r = \sqrt{(x_1-x_{10})^2+\cdots+(x_n-x_{n0})^2},$$

$$a_i = \lambda \frac{x_i-x_{i0}}{r} \qquad (\lambda>0)$$

és $r$ jelére nézve ugyanaz a megállapodás érvényes, mint előbb. A (7)' egyenletekre előbbi fejtegetéseink szóról-szóra alkalmazhatók.

A sík esetére szintén alkalmazható a leírt módszer. Itt két függvénynyel

$$x = f\,(t, x_0, y_0, x'_0, y'_0),$$
$$y = \varphi\,(t, x_0, y_0, x'_0, y'_0)$$

van dolgunk és ennek megfelelően négy változóval: $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $r$, $\rho$-val. A változók számát azonban háromra redukálhatjuk, ha $x'_0$ és $y'_0$ helyett bevezetjük azt az $a$ szöget, melyet az extremálvonal érintője az $(x_0, y_0)$ pontban az $x$ tengelylyel bezár. Ekkor $\rho$-ra nincs szükségünk és az extremálvonalakat ilyen alakú egyenletek állítják elő:[1]

$$x = f\,(t, a, x_0, y_0),$$
$$y = \varphi\,(t, a, x_0, y_0).$$

Ezen egyenletek helyett most a következő hármat kell megoldanunk $\lambda$, $t$ és $a$-ra:

$$\frac{\lambda\,(f-x_0)}{\sqrt{(f-x_0)^2+(\varphi-y_0)^2}} = \alpha,$$

$$\frac{\lambda\,(\varphi-y_0)}{\sqrt{(f-x_0)^2+(\varphi-y_0)^2}} = \beta,$$

$$\sqrt{(f-x_0)^2+(\varphi-y_0)^2} = r,$$

a $C$ tartomány pedig a jelen esetben:

$$t = 0, \quad 0 \leqq a \leqq 2\pi, \quad \lambda = 1. \qquad (C)$$

*

[1] Bolza, *Vorlesungen*, 213. l.

**8. Alkalmazás a mechanikára.** A mechanika differencziálegyenletei variáczióproblémákból is leszármaztathatók. Vegyük holonom[1] rendszerek esetét, vagyis azt az esetet, a mikor a mechanikai rendszer helyzetét végesszámú független paraméterrel lehet meghatározni és tegyük fel, hogy a kényszerek az időtől függetlenek, továbbá, hogy a szabad erőknek van az időtől független potencziáljuk. Legyen $-U$ a potencziál, $T$ az eleven erő, $t$ az idő és $q_1, \ldots, q_n$ a rendszer helyzetét meghatározó paraméterek.

A mozgás pályáit ekkor az eleven erő állandójának adott $h$ értéke mellett az a feltétel határozza meg, hogy a pályák mentén a

$$J = \int_{t_0}^{t} \sqrt{T(U+h)}\, dt$$

integrál variácziója zérus.[2] Ez a legkisebb akczió elvének JACOBItól származó alakja.

A $J$ integrál csak látszólag függ $t$-től. Ugyanis

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_k\, a_{ik} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_k}{dt},$$

a hol $a_{ik} (= a_{ki})$ csak a $q_1, \ldots, q_n$ változóktól függő mennyiség; tehát

$$J = \int \sqrt{U+h} \sqrt{\tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma\, a_{ik} dq_i dq_k}.$$

Erre az integrálra közvetlenül alkalmazhatók az eddigi eredmények.

A pályák differencziálegyenletei tetszésszerinti $\tau$ paraméterre nézve (mely $\tau$ paraméter a rendszernek egymásután elfoglalt helyzeteit határozza meg)

$$\frac{dq_i}{d\tau} = q_i', \tag{8}$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{a_{i1} q_1' + \cdots + a_{in} q_n'}{\sqrt{\tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma\, a_{ik} q_i' q_k'}} \sqrt{U+h} - \frac{\partial}{\partial q_i} \sqrt{U+h} \sqrt{\tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma\, a_{ik} q_i' q_k'} = 0.$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

---

[1] APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, II. k. 296. l.

[2] APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, II. k. 426. l.

Ezek az egyenletek megint nem függetlenek, de most czélszerűbb a $\tau$ paramétert nem a

$$q_1'q_1''+\cdots+q_n'q_n''=0,$$

hanem az

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\, a_{ik}q_i'q_k'-(U+h)=0 \tag{9}$$

egyenlettel definiálni, a honnan

$$d\tau=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\Sigma\Sigma\, a_{ik}dq_i dq_k}{U+h}}.$$

A (9) egyenlet nem más, mint az eleven erő elve, tehát $\tau$ az időt jelenti és a mozgást a

$$\frac{d}{dt}\left(a_{i1}\frac{dq_1}{dt}+\cdots+a_{in}\frac{dq_n}{dt}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_i}=0, \tag{10}$$
$$(i=1,\ldots,n)$$

egyenletek adják.

Ha itt az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns a $q_1,\ldots,q_n$ változók valamely $R$ tartományában sehol sem zérus, akkor megállapítható minden az $R$ belsejében fekvő $R'$ zárt korlátos tartományra olyan $t_0$ érték, hogy az $R'$ tartomány bármely $(q_1^0,\ldots,q_n^0)$ pontján a $t=0$ időben átmenő és az

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\, a_{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt}=U+h$$

egyenletnek eleget tevő mozgás reguláris a

$$-t_0\leqq t\leqq t_0$$

intervallumban.

Ez elegendő arra, hogy tételünk alkalmazható legyen.

*Tehát minden az $R$-en belül fekvő zárt korlátos $R_1$ tar-*

*tományra nézve megjelölhetünk két számértéket, r-et és l-et azzal a tulajdonsággal, hogy ha az $R_1$-ben levő két $Q_0(q_1^0, \dots, q_n^0)$ és $Q(q_1, \dots, q_n)$ helyzet «távolsága»*

$$\sqrt{(q_1-q_1^0)^2+\cdots+(q_n-q_n^0)^2} < r,$$

*akkor (az eleven erő állandójának adott h értéke mellett) egy és csak egy mozgás van, a mely l-nél rövidebb idő alatt a rendszert a $Q_0$ helyzetből a $Q$ helyzetbe viszi.*

*Szűcs Adolf.*

# TÉRBELI ALAKZATOK PROJEKTIVGEOMETRIAI ÁBRÁZOLÁSÁRÓL.

(Második és befejező közlemény.)

## H) *Negyedik eset.*

31. Végre azzal az esettel foglalkozunk, melyben az $|a'b'c'\ldots|$, $|a''b''c''\ldots|$ sugársorok kongruensek és a megfelelő sugaraik egymást födik.

A $|C_1|$, $|C_2|$ kollineár sugárpontok most perspektiv helyzetben vannak, mert a $[c]\equiv[\alpha\beta\gamma\ldots]$ síksor síkjai önönmaguknak felelnek meg.

A koinczidáló pontok geometriai helye a $|C_1C_2|\equiv c$ egyenesből és a $\tau$ perspektiv-síkból áll. Ezt a $\tau$ síkot *koinczidáló síknak* nevezzük.

A koinczidáló egyenesek részben a $\tau$ sík egyenesei, részben pedig azok az egyenesek, melyek a $|C_1C_2|\equiv c$ egyenest metszik. Az involutorikus egyenesek egy $|I|$ sugárpontot képeznek, melynek $I$ czentruma a $|C_1C_2|$ egyenes ama pontja, mely a koinczidáló síktól $C_1$ és $C_2$ által harmonikusan van elválasztva. Ez az előző eset tárgyalásaiból következik (27), mert itt az $[c]\equiv[\alpha\beta\gamma\ldots]$ síksor minden síkjának az a szerepe, a mi ott az $\omega_1$, $\omega_2$ síkoknak volt.

Az involutorikus pontpárok a tér egy czentrikus involutorikus kollineáczió elempárjai, melynek czentruma $I$ és kettős síkja $\tau$.

A síkokat ábrázoló kollineácziók mind annyian czentrikusak. E kollineácziók közös czentruma a képsík $C\equiv C_1\equiv C_2$ pontja, és tengelyük a síknak a $\tau$ síkkal való metszésvonalának egybeeső képei.

Az ábrázolás emez utolsó esete projektiv-geometriai szempontból megegyezik MONGE módszerével.

32. Jelen esetben speczialis transzformácziókat a következőképen végezhetünk.

Legyen $C_3$ a $|C_1C_2| \equiv c$ egyenes pontja és hozzuk a $C_3$ sugárpontot a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokkal a $\tau$ sík pontjai révén kollineár vonatkozásba. Ezután pedig a $|C_3|$ sugárpontot a képsíkkal is hozzuk kollineár vonatkozásba, olyan formán, hogy a $|C_3|$ minden $p'''$ sugarának az a $P'''$ pont feleljen meg a képsíkban, mely a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokban neki megfelelő $p'$, $p''$ sugaraknak is megfelel. A $[c] \equiv [\alpha\beta\gamma \ldots]$ síksornak megfelelő $C_3$-ra vonatkozó $|a'''b'''c''' \ldots|$ sugársor az $|a'b'c' \ldots|$ és $|a''b''c'' \ldots|$ sugársorokkal kongruens és e három kongruens sugársor megfelelő sugarai födik egymást.

Ennek következtében valamely $P$ pont $P'$, $P''$, $P'''$ képei a képsík $|C|$ sugársorának egy sugarán vannak.

A harmadik esetből következik még (30), hogy

$$(CP'P''P''') = (VC_1C_2C_3).$$

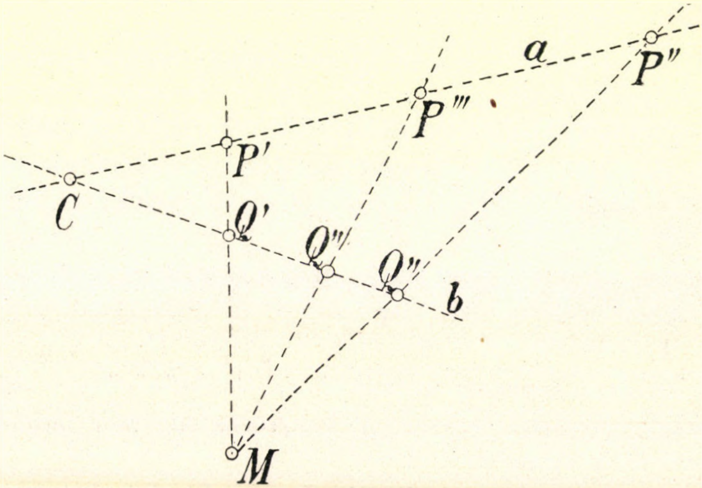
Ha a $[c] \equiv [\alpha\beta\gamma \ldots]$ síksor egy másik síkja valamely $Q$ pontjának a $Q'$, $Q''$ képeiből a $Q'''$ harmadik képét kell meghatározni, feltéve, hogy a $P$ pont három képe $P'$, $P''$, $P'''$ már ismeretes, akkor figyelembe vesszük, hogy

$$(CQ'Q''Q''') = (VC_1C_2C_3).$$

De akkor egyúttal

$$(CP'P''P''') \barwedge (CQ'Q''Q''').$$

Legyen a $P$ pont három képe az $a$, a $Q$ ponté a $b$ sugáron (10. ábra), akkor a $Q'''$ pontot úgy szerkesztjük meg, hogy a $P'''$ pontot a $|P'Q'|$ és $|P''Q''|$ egyenesek $M$ metszéspontjából $b$-re vetítjük. Ez abból is következik, mert $M$ a $|PQ|$ egyenes és a $\tau$ sík döféspontjának egybeeső képei. De $M$ e döféspont harmadik képe is és így a $|PQ|$ egyenes $|P'''Q'''|$ harmadik képe is átmegy az $M$ ponton.




10. ábra.

Ebből az is következik, hogy a $C_3$ czentrumot legtermészetesebben úgy adjuk meg, hogy egy $P$ pont $P'$, $P''$ $P'''$ képeit megadjuk.

## III. Alkalmazások.

I) *Másod-, harmad- és negyedrendű reguláris (torz-) seregek ábrázolása.*

33. *Egy* $|T| \equiv |t_1 t_2 t_3 \ldots|$ *elsőrendű sugársor, melynek sugarai koincziduáló egyenesek képei, egy másodrendű reguláris sereget ábrázol.* A $|T|$ sugársornak ugyanis a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokban a $[t'] \equiv [\tau_1' \tau_2' \tau_3' \ldots]$ és $[t''] \equiv [\tau_1'' \tau_2'' \tau_3'' \ldots]$ projektiv síksorok felelnek meg, melyek az ábrázolt másodrendű reguláris sereget alkotják.

Ha a $T$ pont az $|a'b'c' \ldots|$, $|a''b''c'' \ldots|$ projektiv sugársorok megfelelő sugarain van, akkor a reguláris sereg egy kúpfelületté, vagy egy síkpárrá degenerál.

Az I. és II. esetben a képsík összes sugársorai az ábrázolás kongruencziájában foglalt összes $\infty^2$ másodrendű reguláris seregeket ábrázolják. A III. esetben, ezeken kívül, még más másodrendű reguláris seregeket is tartalmaz a kongruenczia (37). A IV. esetet a továbbiakban kizárjuk.

Minden másodrendű reguláris sereget, a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok megfelelő választása és azoknak a képsíkra való megfelelő kollineár leképezése által, egy sugársorral ábrázolhatunk. Ezzel egyúttal a másodrendű reguláris seregek és felületek legegyszerűbb ábrázolását nyerjük.

34. *Egy* $|l^2|$ *másodrendű sugársor,* — az $l^2$ kúpszelet érintői, — *melynek sugarai koinczidáló egyenesek képei, általában negyedrendű reguláris sereget ábrázol.* Az $|l^2|$ sugársornak ugyanis a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokban két projektiv másodrendű síksor felel meg, melyek az ábrázolt reguláris sereget alkotják.

A koinczidáló pontok a reguláris felület kettős vonalának pontjai. Azok a koinczidáló pontok, melyeknek képei az $l^2$ kúpszeleten vannak, a reguláris felület kuszpidális pontjai.

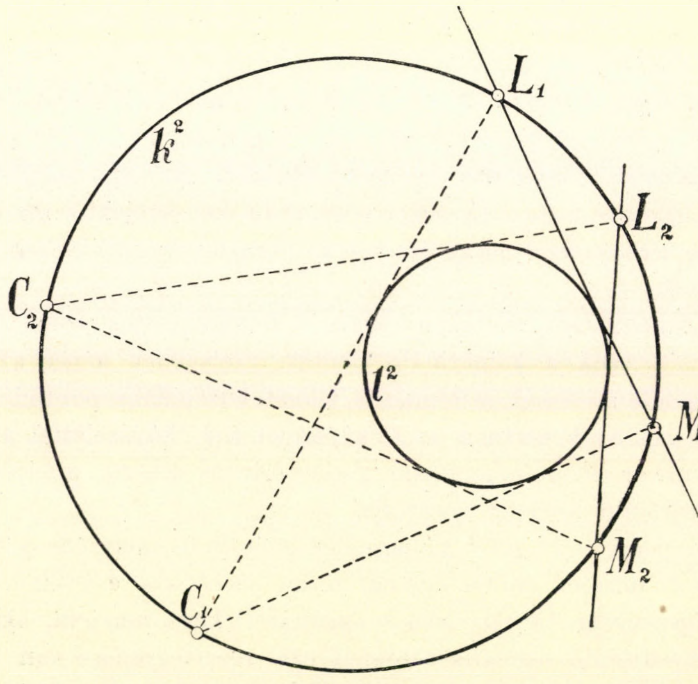
35. Ha az I. esetben az $l^2$ kúpszelet a $k^2$ kúpszelettel azonos, akkor $|l^2|$ a koinczidáló görbe érintői alkotta kifejthető negyedrendű felületet ábrázolja.

Ha pedig a $k^2$ és $l^2$ kúpszeletek kölcsönös helyzete olyan, hogy $k^2$ minden pontja egy-egy olyan háromszög csúcsa, mely $k^2$ kúpszeletbe be van írva s egyúttal $l^2$ köré van írva, akkor a negyedrendű reguláris seregnek egy vezér-egyenese van. Ha a $C_1$ ponthoz tartozó háromszög $C_1L_1M_1$, akkor a reguláris sereg $g$ vezető egyenesének első képe $g' \equiv |L_1M_1|$. A negyedrendű reguláris felületet ugyanis a $[C_1L_1M_1]$ sík a $|C_1L_1|$, $|C_1M_1|$, $|L_1M_1|$ koinczidáló egyenesekben és a $g$ vezető egyenesben metszi. De akkor a $g$ egyenes első képe a képsík $|L_1M_1|$ egyenesébe esik, mert a $[C_1L_1M_1]$ sík összes egyeneseinek első képe ebbe az egyenesbe esik (11. ábra).

Épen ilyen módon megszerkesztjük a $g$ egyenes második képét: $g'' \equiv |L_2M_2|$.

36. Ha az $l^2$ kúpszelet a II. esetben a $v$ czentrális tengelyt

érinti, akkor a negyedrendű reguláris sereg egy harmadrendű reguláris seregre és az $\omega$ síkra válik szét. Ha az $\omega$ síktól eltekintünk, úgy mondhatjuk, hogy $l^2$ *egy harmadrendű reguláris sereget ábrázol.* A harmadrendű felület kettős egyenese az $u$ koinczidáló tengely. A harmadrendű reguláris seregnek van egy $g$ vezéregyenese. Ha a $C_1L_1M_1$ háromszög (12. ábra)



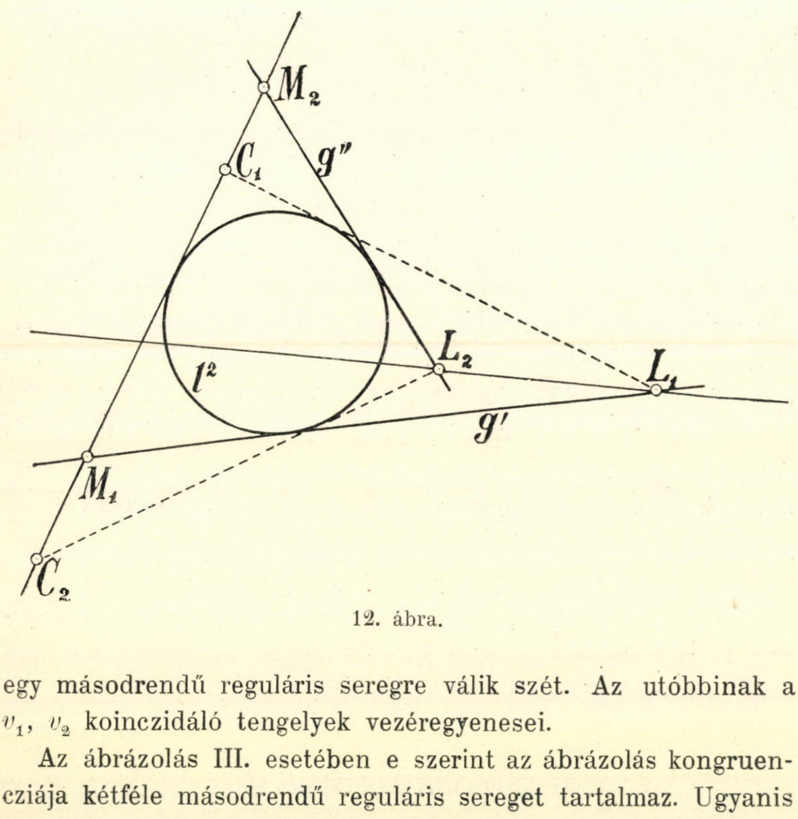

11. ábra.

az $l^2$ kúpszelet köré van írva, akkor $g' \equiv |L_1M_1|$ a $g$ egyenes első képe. A $[C_1L_1M_1]$ sík ugyanis a harmadrendű felületet a $|C_1L_1|$ és $|L_1M_1|$ koinczidáló egyenesekben és a $g$ vezéregyenesben metszi. De az utóbbinak első képe a képsík $|L_1M_1|$ egyenesével egybeesik, mert a $[C_1L_1M_1]$ sík minden egyenesének első képe $|L_1M_1|$. Épen ilyen módon megszerkesztjük a $g$ egyenes második képét: $g'' \equiv |L_2M_2|$.

37. Ha a III. esetben az $l^2$ kúpszelet a képsík $v_1$, $v_2$ ten-

gelyei egyikét érinti, pl. $v_1$-et, akkor a negyedrendű reguláris sereg egy harmadrendű reguláris sereg és az $\omega_1$ síkra válik szét. Ebben az esetben a $v_2$ koinczidáló tengely a harmadrendű felület kettős egyenese és a $v_1$ koinczidáló tengely a vezéregyenese.

Ha azonban $l^2$ a képsik $v_1$ és $v_2$ egyeneseit egyszerre érinti, akkor a negyedrendű reguláris sereg az $\omega_1$, $\omega_2$ síkpárra és




12. ábra.

egy másodrendű reguláris seregre válik szét. Az utóbbinak a $v_1$, $v_2$ koinczidáló tengelyek vezéregyenesei.

Az ábrázolás III. esetében e szerint az ábrázolás kongruencziája kétféle másodrendű reguláris sereget tartalmaz. Ugyanis van $\infty^2$ olyan, melyeket elsőrendű sugársorok és $\infty^3$ olyan, melyeket másodrendű sugársorok (másodosztályú görbék) ábrázolnak.

38. A $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok alkalmas választása és azoknak a képsíkra való megfelelő kollineár leképezése folytán, minden

másod-, harmad-, vagy negyedrendű reguláris sereg (felület) egy $l^2$ másodosztályú görbével ábrázolható.

Ezzel e seregek és felületek igen egyszerű ábrázolását nyerjük, melynek segítségével a rájuk vonatkozó szerkesztések is kényelmesen elvégezhetők. Ezek részletezésére e helyen nem óhajtok kitérni.

39. Egy kúpszeletsereg egy reguláris seregsort — felületsort — ábrázol, mely sorhoz tartozó seregeknek, felületeknek, közös kettősvonaluk van. E felületeknek e közös kettősvonalukon kívül még négy közös sugaruk is van, melyeknek képei a kúpszeletsereg valamennyi elemét érintik.

Az ábrázolás kongruencziájában foglalt valamely másodrendű reguláris sereg, melyet egy $|T|$ elsőrendű sugársorral ábrázolunk, a seregsor minden elemével két közös sugara van. E sugarak képei azok az érintők, melyeket a $T$ pontból a reguláris seregnek megfelelő kúpszelethez húzhatunk. De a kúpszeletseregekre vonatkozó egyik alaptétel szerint a $T$ pontból a sereg kúpszeleteihez húzott érintőpárok egy involuczió elempárjai. Ebből következik:

*Az elsőrendű sugársorral ábrázolt másodrendű reguláris seregek sugarai a reguláris seregsor elemei által párosával vannak egymáshoz kapcsolva, még pedig egy involuczió elempárjaivá.*

Vagy más szóval:

*A reguláris felületsor elemei az elsőrendű sugársorral ábrázolt regaláris másodrendű felületet két-két oly alkotóban metszik, melyek egy involúczió elempárjai.*

J) *Harmadrendű térgörbék.*

40. A $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok alkalmas választása és a képsíkra való megfelelő kollineár leképezése által, minden harmadrendű térgörbét koinczidenczia görbévé tehetünk. E czélból a $C_1$ és $C_2$ pontokat a $k^3$ görbén veszszük fel és a $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontokat a $k^3$ görbe pontjai révén hozzuk egymással kol-

lineár vonatkozásba. E két sugárpontot azután olyan formán hozzuk a képsíkkal is kollineár vonatkozásba, hogy két megfelelő sugárnak, mindig egy és ugyanaz a pont feleljen meg. Ezzel kapjuk a kivánt ábrázolást.

Ebből következik, hogy az ábrázolás első esetét a harmadrendű térgörbék tulajdonságainak vizsgálatánál és a rájuk vonatkozó szerkesztések elvégzésénél, igen czélszerűen felhasználhatjuk.

Emez alkalmazások közül csak kettőt óhajtok itt felemlíteni.

41. *Meghatározandók valamely $k^3$ harmadrendű térgörbe ama simuló síkjai, melyek a tér valamely $P$ pontján átmennek.*

Legyenek a $k^3$ harmadrendű görbének, mint koinczidáló görbének, az egybeeső képei a $k^2$ kúpszelet (13. ábra), a $P$ pont képei pedig $P'$, $P''$. Vegyünk most fel a $k^3$ görbén egy $C_3$ pontot és transzformáljuk erre vonatkozólag a $P$ pontot. Így nyerjük a $P$ pont $P'''$ harmadik képét. Ha $C_3$ a keresett simuló síkok egyikének símuló pontja volna, akkor $P'''$-nek a $k^2$ kúpszelet $C_3$ pontjához tartozó $s'''$ érintőjén kellene lenni.

Ebből következik, hogy tulajdonképeni feladatunk ama $C_3$ pontoknak a meghatározása, melyekre nézve a $P'''$ pont a megfelelő $s'''$ egyenesen van.

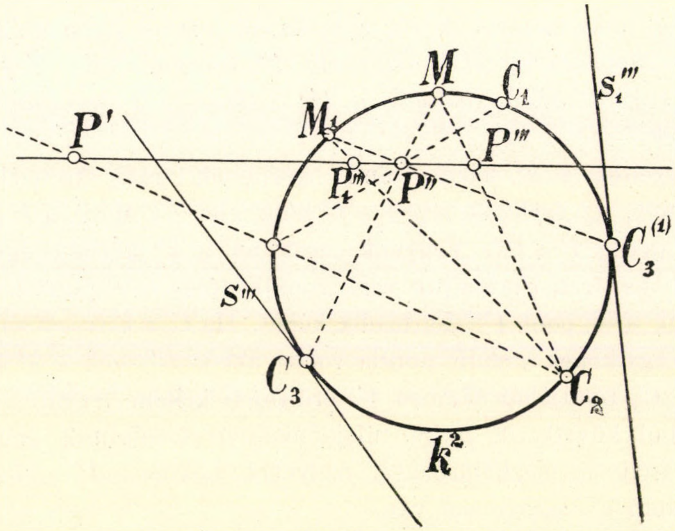
A $(k^2) \equiv (C_3 C_3^{(1)} C_3^{(2)} \ldots)$ másodrendű pontsornak egyrészt a $(P''' P_1''' P_2''' \ldots)$ elsőrendű pontsor, másrészt a $|k^2| \equiv |s''' s_1''' s_2''' \ldots|$ másodrendű sugársor felel meg, melyek a $(k^2)$ másodrendű pontsorral s így egymással is projektivek. Ugyanis

$$s''' s_1''' s_2''' \ldots | \barwedge (C_3 C_3^{(1)} C_3^{(2)} \ldots) \barwedge (M M_1 M_2 \ldots) \barwedge |C_2 . M M_1 M_2 \ldots| \barwedge (P''' P_1''' P_2''' \ldots).$$

E szerint a $(P''' P_1''' P_2''' \ldots)$ pontsor ama pontjait kell meghatároznunk, melyek rajta vannak a vele projektiv $|s''' s_1''' s_2''' \ldots|$ sugársorban nekik megfelelő sugarakon.

Ismeretes azonban, ha az említett pontsor nem minden pontja van rajta a vele projektiv másodrendű sugársor megfelelő sugarán, — a mit itt kizártnak kell tekinteni, — akkor a pontsornak legföljebb három, de legalább egy ilyen pontja van. Hogy eme pontokat miképen határozzuk meg, a projektiv geometria elemeiből ismeretes.[1]

42. *Valamely $k^3$ harmadrendű térgörbe három pontjához tartozó símuló síkjainak metszéspontja — mint ismeretes — a három simuló pont síkjában van.*[2] Itt be akarom mutatni, miképen lehet módszerünket a tétel bebizonyitására felhasználni.




13. ábra.

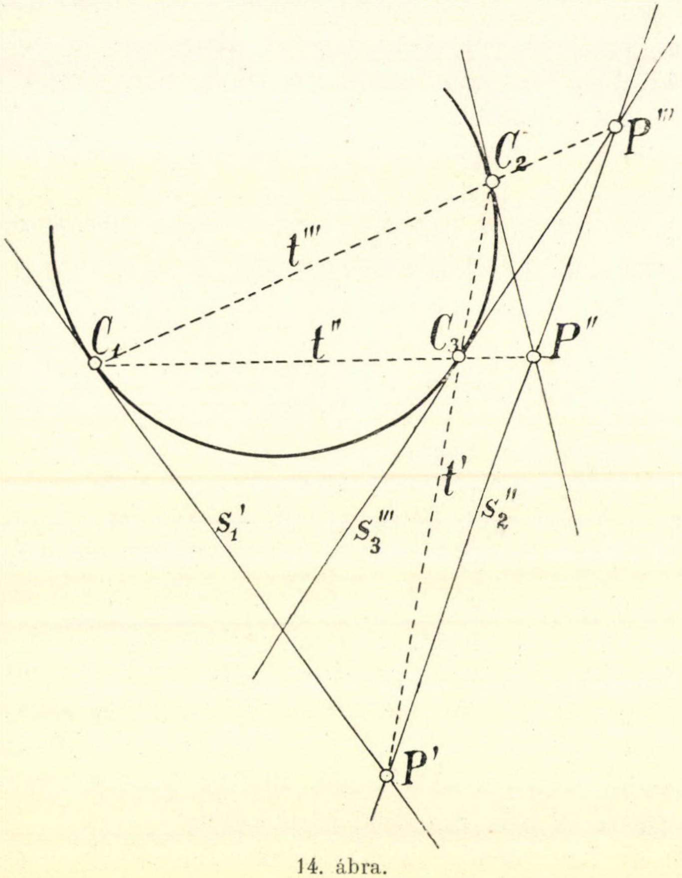
Legyenek a $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ símuló síkok $C_1$, $C_2$, $C_3$ símuló pontjai egyúttal az ábrázolás czéljaira szolgáló $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ sugárpontok középpontjai (14. ábra).

A $\sigma_1$ sík pontjának első képei az $s_1'$ érintőn, a $\sigma_2$ sík pontjainak második képei az $s_2''$ érintőn, a $\sigma_3$ sík pontjainak harmadik képei az $s_3'''$ érintőn van. A $[C_1C_2C_3] \equiv \tau$ sík pontjainak első képei a $|C_2C_3| \equiv t'$, második képei a $|C_1C_3| \equiv t''$, harmadik képei pedig a $|C_1C_2| \equiv t'''$ egyenesen vannak.

[1] Reye i. m. I. Abt. 129. old. (III. kiadás 1886.)

[2] Reye i. m. II. Abt. 208. old.

Az $(s_1', t') \equiv P'$, $(s_2'', t'') \equiv P''$, $(s_3''', t''') \equiv P'''$ pontok a PASCAL-féle tétel szerint egy egyenesen vannak. Egyúttal eleget tesznek ama feltételeknek, hogy egy $P$ pontnak a $C_1$, $C_2$, $C_3$ pontokra vonatkoztatott képei legyenek. Ez a $P$ pont azonban a




14. ábra.

$\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ simuló síkok metszéspontja, mert $P'$ az $s_1'$, $P''$ az $s_2''$, $P'''$ az $s_3'''$ egyenesen van. De ez a $P$ pont a $\tau$ síkban is van, mert $P'$ a $t'$, $P''$ a $t''$, $P'''$ a $t'''$ egyenesen van.

Ezzel a tétel be van bizonyítva.

K) *A horopter elméletéhez.*[1]

43. Legyenek $C_1$ és $C_2$ a szemünk optikai középpontjai. A $|C_1|$, $|C_2|$ sugárpontok között rokonságot létesítünk azáltal, hogy azokat a sugarakat tekintjük megfelelőknek, melyek a két retinát megfelelő pontokban metszik. HELMHOLTZ *szerint feltesszük, hogy az ilyen módon egymásra vonatkoztatott két sugárpont kongruens.*

Az ábrázolás czéljaira ezt a két kongruens sugárpontot is felhasználhatjuk. Ezeket a képsíkkal kollineár vonatkozásba hozzuk, olyanformán, hogy a megfelelő sugaraknak a képsík egy és ugyanaz a pontja feleljen meg.

*Szemünk bármely beállításánál a koinczidáló pontok geometriai helye a horopterrel azonos.* A horopter ama pontok geometriai helye, melyeknek képei a két retina megfelelő pontjaira esnek. *A horopter pontjait csak egyszerűen látjuk, míg a tér többi pontjait kettősen.*

De a koinczidáló pontokon kívül az involutorikus pontoknak is van fiziológiai jelentőségük. Az ilyen $P$, $Q$ pontok egyikének az egyik szemben levő képe és másikának a másik szemben keletkező képe a retinák megfelelő pontjaira esnek. A $P$ pont minden egyes képe tehát a $Q$ pont egy-egy képével a tudatban egységes érzet alakjában egyesül. Ha ilyen két pont különböző szinű, egyszinüeknek látszanak. Ha pl. az egyik kék, a másik sárga volna, mind a kettőt zöldnek látnók. Ilyen módon az involutorikus felület, mely általában másodrendű reguláris felület, is nyer fiziologiai jelentőséget.

Ha egy zárt vonallal az involutorikus felület egy részét határoljuk, akkor e vonal pontjainak konjugáltjai a felület egy másik részét határolják. Az egyik felületrész minden képe a

---

[1] A horopter elméletéről és irodalmáról felvilágosítást nyujt a következő munka:

Dr. WALTER LUDWIG: Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve. Halle a. S. 1902.

másik felületrész másik képével egy érzetben egyesül. Ha e felületrészek különböző szinűek, úgy azokat egyszinűeknek látjuk.

Hogy ez mennyire felel meg a tényeknek, azt eddig — tudtommal — még nem vizsgálták meg. Érdekes volna emez eredményeket kisérletileg igazolni. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy ezek a következtetések csak megközelítéseknek tekinthetők, a mennyiben Helmholtz feltevései is csak ilyen megközelítések.

*Dr. Privorszky Alajos.*

# A FÖLDFELÜLET ERŐLTETÉSI VONALAI.[1]

A földfelületi képződmények kisérleti utánzása a múlt század elején vette kezdetét. J. HALLt illeti meg e téren az elsőség, utána főleg DAUBRÉE és BAILEY WILLIS szereztek érdemeket. Néhány éve váratlan segitség érkezett a physikai földrajz számára a franczia tűzérség ágyúpróbáiban, a melyekkel kapcsolatban HARTMANN a geographus számára fölötte érdekes eredményekről számol be. Ugyancsak kisérletileg, de a mellett elméletileg is foglalkozott az erőltetési vonalakkal REJTŐ; eredményei fölötte tanulságosak nem csak a mechanika, hanem a geologia és geographia szempontjából is;[2] a tünemény mathematikai tárgyalása RÉTHY[3] munkáinak köszönhető. Jelen értekezés czélja szembe állítani a kisérletileg előállitott és a természetben megfigyelt tüneményeket, továbbá oly erőt keresni, a mely alkalmas arra, hogy a Föld felületén hasonló alakulásokat létre hozhasson. A kisérletek leirásában főkép HARTMANN munkája szolgál alapul; a tünemény magyar elnevezése az «erőltetési vonal» RÉTHYtől származik.

## I. Kisérletek.

HARTMANN különböző alakú, többnyire aczélból készült tárgyakat mindenféle igénybevételnek, ú. m. húzásnak, nyomás-

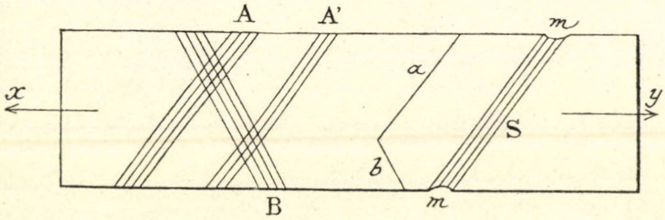
[1] Előadatott a Társulat 1909 febr. 4-iki ülésén.

[2] «Az elméleti mechanika néhány alaptétele», továbbá «Enquête sur la fatigue des métaux», a «La Technique moderne» 1910. évfolyamában.

[3] «A fémek erőltetési vonalairól». Math. és Term. Tud. Értesitő 1909. és 1910.

nak, csavarásnak, nyirásnak stb. vetett alá. A földfelület szempontjából főleg a húzás és nyomás diagrammjai érdekesek, egyrészt mert ezek hasonlítanak leginkább a természetben előforduló alakokhoz, másrészt mert ilyen erőket találhatunk legkönnyebben a hegyképződés magyarázatára.

Homogén és isotrop testeknek az erő irányába eső felületén, akár húzás, akár nyomás hatása alatt, *úgy a rugalmassági határon innen mint azon túl*, két szabályos, egymást keresztező párhuzamos vonal-rendszer keletkezik, a melyek mindegyike az erő irányával ugyanazt a szöget zárja be. Az így kifejlődött vonal-rendszerek sík lapokon párhuzamos egyenesekből, henger-felületen spirálisokból, gömbön loxodromákból




1. ábra.

állanak. A kifejlődés ritkán teljes; az igénybe vett test fölületén rendszerint maradnak deformálatlan mezők. Az is előfordul, hogy az egyik rendszerhez tartozó vonal a másik rendszerében folytatódik. (1. ábra.) Az igénybevétel fokozása egyrészt a már meglevő vonalak kiszélesedését, másrészt új vonalak alakulását vonja maga után. Az új vonalak szintén az eredeti rendszerben helyezkednek el. Egészen homogén fémben, a milyen pl. a vörös réz, a deformatiók irányában, a kisérlet egész tartama alatt semmiféle változás nem fordul elő.

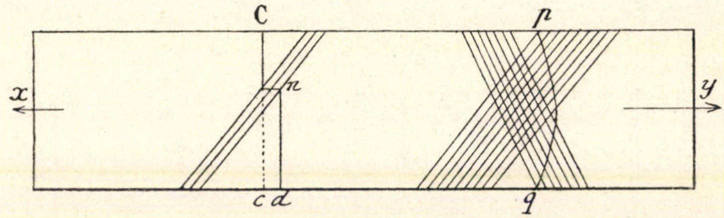
Vékony lemez húzása alkalmával egy-egy vonal-nyaláb szélein behorpadás észlelhető. (1. ábra *mm*.)[1]

---

[1] A húzás erősbbödésével a vonal-nyalábok egyetlen rendszert alkotnak, a melyet a két oldalon egy-egy horpadás szegélyez.

Az erő irányára merőlegesen húzott egyenest az erőltetési vonalak kitérítik útjából s tört vonallá alakítják át (*Cnd* 2. ábra bal oldala). Erősebb igénybevétel hatása alatt keletkezett több erőltetési vonal, a melyek egész nyalábot alkotnak, görbe vonallá alakítja a föntebb említett egyenest (*pq* 2. ábra jobb oldala).

Az erőltetési vonalaknak az erő irányával bezárt közös szöge független a test méreteitől, csupán az anyagtól s annak szerkezetétől függ. A vonalak iránya a húzás vagy nyomás sebességétől sem függ;[1] a sebesség befolyása mindössze abban nyilvánul, hogy növekedésével a vonalak száma csökken.




2. ábra.

Az erő irányára harántos bevágás ellensúlyozhatja, sőt teljesen megakadályozhatja az erőltetési vonalak alakulását.

Ha a vékony lemez igénybevételét megszüntetjük s a rajta képződött vonalrendszert eltörüljük, azután a lemezt újabb igénybevételnek vetjük alá, ugyanolyan körülmények közt, mint előbb, új vonalak csakis azon megterhelés túllépése után alakulnak, a melyet előbb alkalmaztunk, vagyis a fémlemez újabb rugalmassági határán túl. Az új hálózat a réginek helyét foglalja el (csakis vékony lemezeken), de annál sokkal kevésbbé éles képet ad; az erő növekedésével ugyanazt a kifejlődést éri el, mintha az igénybevétel nem szakadt volna meg, de mindvégig elmosódott marad.

Ha a lemezt oly köralakú lyukak szakítják meg, a melyek-

[1] Az ütés (rántás) ugyanolyan eredményt hoz létre, mint a lassú nyomás (húzás).

nek középpontja a lemez középvonalába esik, akkor a hálózat ugyanúgy alakul, mint folytonos felületen; csak azonkívül még harántos hasadások is alakulnak.

A vonalak élessége és az erő irányával bezárt szöge az anyag physikai állapotának függvénye és jellemzője. A hálózat annál sűrűbb, minél nagyobb az illető anyag rugalmassági határa. Pl. az edzett (trempé) aczélon szakadozott és alig látható vonalrendszer keletkezik, míg az utánaeresztett (recuit) aczélon a zónák szélesek és tágasak.

A vörös izzáshoz közel álló hőfoknál is ugyanolyan vonalrendszerek képződnek, mint normális hőmérsékletnél, de a hálózat kevésbbé szoros és nem olyan éles.

Az összes kisérleteknél a törés vagy az erőltetési vonalak mentén, vagy a hosszirányra merőlegesen megy végbe; gyakran a két eset combinatiója áll elő.

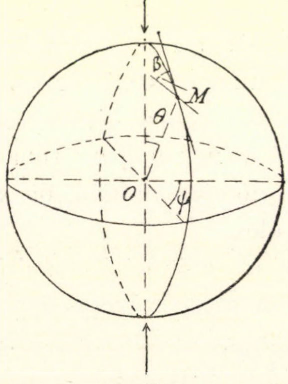
Az igénybe vett test fölületén előfordulnak szabálytalan vonalak is, a melyek semmiféle törvényt nem követnek; ezeket igen könnyű megkülönböztetni a szabályos rendszerektől.

A hirtelen lehűtött (trempé) testek felületén ugyanoly tünemények észlelhetők, mint a milyenek húzás vagy nyomás hatása alatt keletkeznek.

A húzás hatása alatt keletkezett erőltetési vonalak a tengelylyel mindig 45°-nál nagyobb szöget zárnak be, a nyomáséi 45°-nál kisebbet; ugyanazon anyag számára a két szög 90°-ra egészíti ki egymást.

Egészen szabályos hálózat csakis úgy érhető el, ha a nyomás egyenletesen és merőlegesen oszlik el a két alapfelületen. Ehhez szükséges, hogy a két alap szigoruan párhuzamos és lehetőleg tökéletesen csiszolt legyen. Az alkalmazott hydraulikus sajtónak szorosan hozzá kell simulnia az alap felületéhez, annak egész terjedelmében stb. Ez elővigyázati intézkedések hijján a támadó felületek közelében s velük párhuzamosan is keletkeznek vonalak, a rendes hálózaton kívül. Az alapokkal párhuzamos és a ferde vonalrenszerek teljesen függetlenek egymástól; kölcsönösen keresztezik egymást, a nélkül, hogy a találkozó pontokban bármelyiküknek irányán a legcsekélyebb változás volna észlelhető.

Gömbök összenyomása alkalmával az előbb leírtaknak teljesen megfelelő vonalrendszerek keletkeznek. Ha bármely erőltetési vonalnak egy tetszőleges pontjában (M 3. ábra) az érintőjét megrajzoljuk, ez az egyenes, az ugyanazon pontban emelt meridián-érintővel ugyanazt a $\beta$ szöget zárja be, a melyet vékony lemezen, hasábon és hengeren láttunk. A hálózat itt is egymást keresztező két vonalrendszerből áll. A föntebb mondottak szerint a gömb erőltetési vonalai loxodromák, a melyeknek egyenlete:



3. ábra.

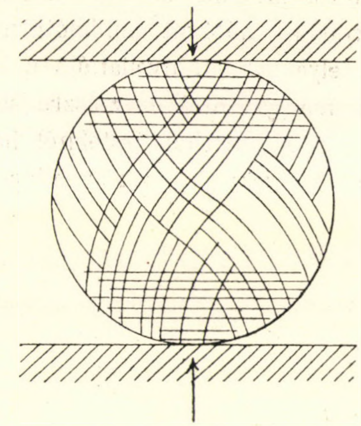
$$\psi = \operatorname{tg} \beta \lg \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

a hol $\psi$ az $M$ ponton átmenő meridián és az $M$ ponton átmenő erőltetési vonalnak az Egyenlítővel való metszéspontján keresztülhaladó meridián hosszkülönbsége, $\theta$ pedig a gömb középpontjából $M$-hez húzott sugár és a nyomó erő iránya közt bezárt szög (a fr. szélesség pótszöge). $\beta$ definitióját föntebb adtuk. (3. ábra.)

Hartmann szerint valamennyi forgási test ugyanezt a törvényt követi.

A loxodromikus vonalak kizárólagos megjelenése csakis az esetben következik be, ha a forgási testnek két oly parallel sík lapja van, a melyeknek sugara legalább fele a legnagyobb keresztmetszet sugarának s a nyomás e két parallel-felületen egyenletesen oszlik meg.

Ha teljes gömbbel, két egymás közt parallel érintő felület segítségével két pontban közöljük a nyomást, akkor a loxodromákkal egyidőben, az érintő felületekkel parallel kisebb körök mentén is keletkeznek vonalrendszerek, de csakis a sarkok közelében; az Egyenlítő környékén egyáltalában nem jelentkeznek. Discontinuitás épen úgy észlelhető rajtuk, mint a loxodromákon; elhelyezkedésük s jellemző tulajdonságaik ugyanolyanok, mint az egyenetlenül nyomott prismákon megjelenő vonalaké. (4. ábra.)

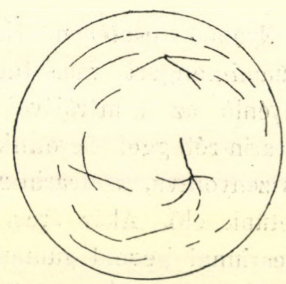


4. ábra.

Mindezek a szabályosságok csak egyenletesen eloszló nyomás hatása alatt, homogén testeken keletkeznek; hogy az egyenetlenségek mily szabálytalan vonalakat hoznak létre, azt az 5. ábra mutatja.

Az erő növekedtével a loxodromák mentén hasadások támadnak, a melyek az Egyenlítő környékén a legszélesebbek. Előfordulnak még hasadások oly kúpok vagy csonka kúpok mentén, a melyeknek alapja a támasztó felület, alkotójuk pedig $\beta$ szöget zár be az erő irányával. (6. ábra.)

Ha az anyag lágy, a vonalakat a szomszédos részecskék betöltik oly mértékben, a mint az erő növekszik s ez esetben nem lehet eltörni a gömböt vagy hengert, a mely tekintélyes megrövidülést bír el, csak a geometriai alakot változtatva, rugalmassági erők kifejtése nélkül.

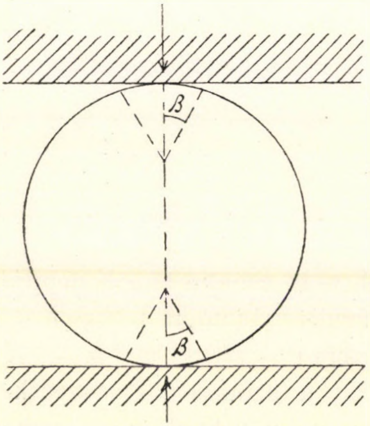


5. ábra.

A kisérletek a közönségesnél magasabb hőmérsékletű testekre is kiterjedtek; egyes tárgyakat 100°, 200°, 300° s még magasabb hőfokra is fölmelegítettek.

Valamennyi esetben meg volt állapitható, hogy a deformatiók hasonlók voltak azokhoz, a melyek a közönséges hőmérsékletű testek felületén mutatkoztak; a vonalak irányában és relativ helyzetében semmiféle módosulás nem volt észlelhető; azonban a kép annál kevésbbé éles, minél magasabb a hőmérséklet a kisérlet végén;[1] nevezetesen, ha a nyomás a vörös izzásnál ér véget (au rouge à peine naissant), a csavarvonalas hálózat milliméternél szélesebb szallagokból áll, a melyeknek denivellatiója a környezethez képest igen csekély; a meggyszínnél már észre sem vehető.

A plasticus testeknél hasonló jelenségek észlelhetők, mint a mereveknél, csak az eljárás körülményesebb. HARTMANN oly anyagot alkalmazott, a mely nagy rugalmas deformatiókat képes elszenvedni, aránylag csekély erő befolyása alatt; ezt a testet bekeni vékony plasticus anyagú réteggel. A plasticus test, képtelen lévén rugalmas deformatióra, elszakad, mihelyt az őt támogató test alakját megváltoztatja; az így keletkezett szakadások ugyanazon törvényszerűségeket mutatják, mint a melyeket a fémek igénybevételénél láttunk.



6. ábra.

Nyomás esetében, HARTMANN szerint, legalkalmasabb oly gummi-hengert választani, a melynek magassága nagyjából egyenlő az átmérőjével s ezt a hengert vékony olvasztott stearin-réteggel bevonni. A hengert akár kézzel gyöngéden összenyomva, a stearin-rétegen szabályos helix-hálózatot idézhetünk elő. Akár üres, akár teljesen kitöltött, hasonlóképen stearinnal bevont gummigömbön, loxodromák szerint elhelyezkedő törésvonalak keletkeznek.

Hasonló eljárás alkalmazható a húzásra. Ha egy, körülbelül 20 mm. széles, elég vékony gummi-szallagot stearinnal bevonunk és csak néhány mm-rel megnyújtjuk, a stearin-réteg

[1] A hőmérséklet legmagasabb a kisérlet elején.

már a szabályos hálózatot mutatja. Ugyancsak sikerül ez a kisérlet kézzel húzott hengerekkel is; megjelen rajta a helixek tisztán látható hálózata, bár ugyanakkor szabálytalan vonalak is jelentkeznek, a melyek azzal magyarázhatók, hogy a plasticus anyag nem tapad egyenletesen a gummihoz.

A plasticus anyagokkal való kisérletezésben HARTMANNT jóval megelőzte DAUBRÉE, a ki a Föld felületén elöforduló törésvonalakat akarta kisérletileg előállitani. DAUBRÉE oly anyagot használt, a mely pép-keverékből, méh-viaszból és enyvből állott. Ebből az anyagból készült prismákat hydraulikus sajtó alá helyezett. A nyomás hatása alatt a prismán egy nagy hasadás jelentkezett, a mely a felső élek egyikétől indul ki, fokozatosan növekszik s végre eléri az ellentett oldalt, a mivel háromszögű prismát hasit le az eredeti hasábból. Az egyik alsó éltől szintén kiindul egy hasadás, a mely az elsőhöz képest symmetrikusan helyezkedik el s ott végződik, a hol az elsővel találkozik. A nagy hasadásokon kivül valamennyi oldalon finom kis barázdák jelentkeznek, ugyanolyan elrendezésben, mint a fémek erőltetési vonalai. E bevágódások igen keskenyek; némelyikük oly finom és szabályos vonal alakjában tűnik elő, mintha vésővel rajzolták volna őket. A kis barázdák párhuzamosak a két nagy hasadással s sűrű hálózatot alkotnak.

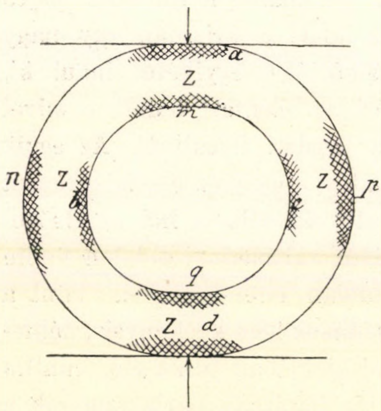
Nagyitóval vizsgálva, a jól látható barázdák között, még finomabb vonalak különböztethetők meg, a melyek szigorúan párhuzamosak az előbbiekkel s azoknál nem kevésbbé szabályosak.

Az így összehasadozott tömeg hasábokra morzsolható.

DAUBRÉE megjegyzi, hogy a metszési szögeknek 90° felé tartó tendentiája, a mely a kisérleteknél mutatkozik, a természetben is észlelhető. Szerinte a főhasadások a törésvonalaknak felelnek meg, a finomabb barázdák pedig a sziklák rétegződésének.

HARTMANN üres testekkel is kisérletezett, a melyek közül csak összenyomott hengert mutat be. Az üres hengert két sík lap közé fogja s az összenyomás alkalmával a következőket tapasztalta: Compressio-vonalak keletkeznek *a, b, c, d*-ben, extensio-vonalak *m, n, p, q*-ban. Ha a henger lapultsága már jelentékeny, akkor semleges vonalak jelentkeznek a *Z*-vel jelölt helyeken. (7. ábra.)

A földfelület kialakításában talán a hasadásoknál is nagyobb szerepet játszanak a ránczolódások. Ezeket szintén sikerült kisérletileg utánozni s e téren ugyancsak DAUBRÉE szerzett nagy érdemeket. Utána BAILEY WILLISnek sikerült még tökéletesítenie a kisérleteket. DAUBRÉE fém- és agyag-lemezekkel, B. WILLIS különböző, egymás fölé rakott rétegekkel kisérletezett. Sikerült is utóbbinak az Appalache-ok összes ránczait előállítani, de a komplikáltabbakat csak úgy, hogy az összenyomandó rétegeket két irányú nyomásnak vetette alá.



7. ábra.

Különösen fontosnak tartjuk annak hangsúlyozását, hogy az alkalmazott erők iránya, úgy a ránczvetés, mint a hasadások előállítása alkalmával mindig megfelelt a Földön ható tangentialis erőknek. A ránczokra vonatkozó kisérletek rövid foglalata majd minden geologiai kézikönyvben megtalálható; a részletesebb ismertetést DAUBRÉE[1] és BAILEY WILLIS[2] munkái nyujtják.

## II. Megfigyelések.

A Föld hegyeinek kialakulásában két typusnak jutott főszerep: A hasadásoknak és a ránczolódásoknak.

[1] DAUBRÉE: Etudes synthétiques de géologie expérimentale. Paris, 1879.
[2] BAILEY WILLIS: The mechanics of Appalachian structure. U. S. Geol. Surv. An. Rep. XIII. 1891—92. part. 2.

A hasadások magukban véve nem lennének földátalakító tényezővé; csak a felületen ható erőkkel együtt működve válnak azzá. A legtöbb hasadás oly keskeny, hogy közönséges mechanikai megfigyeléssel észre sem vehető. A geologus is csak úgy állapithatja meg létezését, ha ismeri az egymás mellett fekvő rétegek korát és egymáshoz képest elfoglalt helyzetét. A törés mentén ugyanis a rétegek elcsúsznak és különböző korú rétegek kerülnek egy szintbe. Gyakran előfordul, hogy valamely hasadás két oldalán a lapok egészen egymáshoz érnek s csúszás közben lecsiszolják egymást, néha egészen tükörsíma felületeket alkotva. A hasadás síkja gyakran nem esik bele a vertikálisba, hanem azzal szöget alkot. Síkjuknak a földfelülettel alkotott metszésvonala a legtöbb esetben nagyjából egyenesnek mondható, bár a domborzati viszonyok a sík hasadásnak a felülettel való metszési vonalát elgörbítik. Egyenesnek vettük a metszési vonalat azért, mert a legtöbb hasadás, hosszúságban is oly csekély kiterjedésű, hogy a legnagyobb kör íve azon a kis darabon egyenesnek tekinthető. Eloszlásuk korántsem olyan szabályos, mint a Hartmann loxodrómáié, a melyeket homogén aczél-gömbökön állított elő, vagy akár a Daubrée viasz-prizmáján előtünt egyenesek. Viszont sokkal szabályosabbak, mint az ugyancsak Hartmann kisérletei közt látható görbe vonalak, a melyeket ő nem homogén lapon idézett elő.

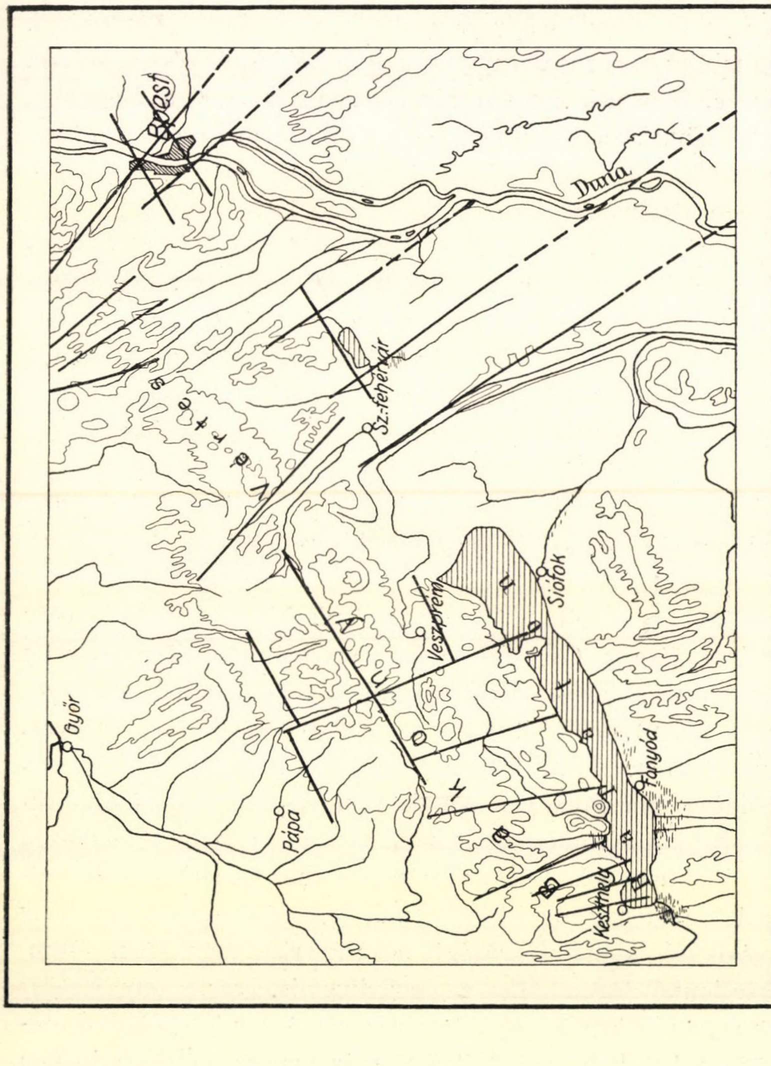
A hasadások hegy-alkotó jelentőségét azok a verticalis eltolódások adják meg, a melyek a hasadások mentén végbementek. Ezekkel itt fölösleges foglalkoznunk, bármely geologiai kézikönyv elegendő felvilágosítást nyújt róluk. Annyit azonban hangsúlyoznunk kell, hogy a Föld több helyén előforduló széles és mély árkok (pl. a Vörös-tenger medenczéje) iránya nem esik össze szükségképen a hasadások irányával. A hasadások közt levő területek beszakadása alkotja az árkot s a beszakadt kéreg-daraboknak egymás mellé sorakozása szabja meg az árok irányát.

A hasadások elrendeződése igen különböző; gyakran csak egyes vonalak vannak kifejlődve, a melyek egymást el sem érik, vagy néhol keresztezik egymást. Talán mégis leggyakoribb a rombusos elrendezés, valóságos sakk-tábla alakjában; csakhogy a mezők nincsenek egy niveauban, hanem némelyek többé-kevésbbé lesülyedtek, mások fönmaradva hegyeket alkotnak. A kisérletileg előállitott erőltetési vonalakhoz abban is hasonlítanak, hogy a földfelületnek csaknem minden ismeretes részén feltalálhatók, úgy a táblás elrendezésű, mint a gyűrődött területeken. A közrefogott rombusok területe igen különböző: ismeretesek Közép-Európában több km²-t kitevő területek, egyes sziklákon pedig egész apró négyszögek is. Ezeket, mint föntebb láttuk, DAUBRÉE is tapasztalta az ő viasz-prizmáján. A földfelülettel alkotott metszésvonalak irányán lehetetlen észre nem venni bizonyos szabályosságokat, a melyekkel szemben viszont igen sok ellenmondást találunk. Hajlandó vagyok általános főirányokul a HARTMANN-féle loxodromákat tekinteni, oly módon, hogy azok a csillagászati meridiánokra vonatkozzanak és az ezektől való eltéréseket a földkéreg heterogénéitásának tulajdonitani. Hogy ez elfogadható-e, annak megitélése a geologusok föladata.

A két vonalrendszertől bezárt szög a legtöbbször közel esik a derékszöghöz s a vonalak a meridiánhoz legtöbbször átlag 45° szög alatt hajlanak. Az eddigi megfigyelések alapján gondolni sem lehet annak eldöntésére, vajjon e szögek húzó vagy nyomó erő hatásának felelnek-e meg.

A vonalak irányát a mellékelt ábrák és térképek minden szövegnél kifejezőbben mutatják. Némelyik, mint a Balaton melléke (8. ábra), a Thüringerwald, (lásd Haug: Traité de Géologie 246. l.), egyenesen követeli a meridián mentén ható erő föltevését; mások annak határozottan ellentmondanak. (Banon, Basses-Alpes, l. Haug i. m. 225. l.)

Az ellentmondások súlyát jelentékenyen csökkenti két körülmény. Aż egyik a kisérleteknél látott eredmények, a melyek igen nagy szabálytalanságot mutattak, mihelyt a kisérleti tárgy nem volt homogén. Senki sem tételez fel a földkéregről olyan

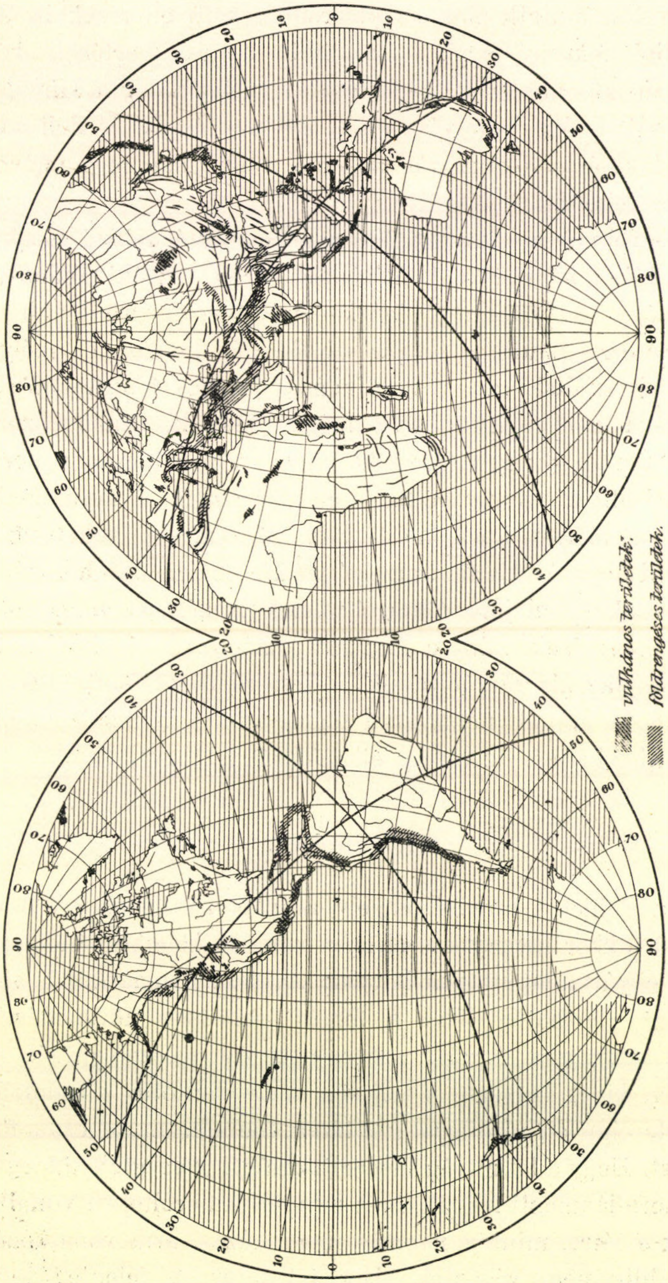



8. ábra. A Magyar középhegység dunántúli részének törésvonalai Lóczy szerint.

homogeneitást, mint egy laboratoriumban gondosan kikészített aczélgömbről. A másik «enyhítő körülmény» az a rendkívüli nehézség, a melylyel a törésvonalak megállapítása jár s a melyhez hozzájárul a megfigyelések csekély száma.

A hasadások mellett a ránczoknak van kiváló jelentőségük a földfelület alakulásában. Sokkal feltünőbbek és tömegesebbek is az előbbieknél. Legnagyobb hegységeink, pl. a Kárpátok, Alpok, Himalaya, Cordillerák stb. mind ránczolódások. Míg azonban hasadások a Földnek csaknem minden ismeretes részén előfordulnak, a ránczok aránylag jóval csekélyebb területre szorítkoznak. Túlnyomó részük két vonal mentén sorakozik; egyik a pacificus, másik a mediterrán systéma. Elrendeződésüket a mellékelt térkép mutatja. A pacificus rendszerben az észak-déli, a mediterránban a kelet-nyugat irányú hegyláncok dominálnak. (9. ábra.) A térképen vastag vonallal húzott két legnagyobb kör Montessus de Ballore köreit mutatja; szerinte ezek mentén fordul elő a földrengések 96%-a. A statisztikai úton megállapított tényhez magához is szó fér, dynamikai megokolását eddig meg sem kisérelték.

A szabályosságnak és a rendszertelenségnek csodálatos vegyülékét képviseli a lánczhegységek elrendeződése. Lóczy szavaival élve a Csendes-oczeán partvidéke a Föld legszebb harmoniája. Valóban nem találunk a Földön ennél harmonikusabb alakulást, de ennek a szabálytalanságai is oly nagyok, hogy csaknem láthatatlanná teszik a törvényszerűségeket. A Földön, mint Poincaré mondja, minden erőt csak a többiekkel való küzdelemben észlelhetünk. Valamennyin uralkodik a Föld részecskéinek tömegvonzása s ehhez képest a többi eltörpül, de egymáshoz képest mindegyik elég nagy ahhoz, hogy a másiknak szabályszerűségét megzavarja, vagy épen észrevehetetlenné tegye. Már a czentrifugális erő is oly kicsiny a tömegvonzáshoz képest, és oly kevéssé mulja felül a hegyalkotó erőket, hogy a lapultságot már nem megfigyelés, hanem elméleti levezetés útján ismertük meg. S a mint oly pontosságra tett szert a megfigyelés, hogy a lapultság ki volt mutat-




9. ábra. A hegységek, vulkános és földrengéses területek eloszlása és Montessus de Ballore körei.

ható, rögtön mutatkoztak a sphæroidtól való eltérések is. Már az eddigi fokmérésekből kiszámított lapultság-értékek közti maximalis különbség 17%-ot tesz ki valószínűleg a Himalaya s a Tibeti fenföld befolyása alatt. Egy-egy északi és déli sarkvidéki fokmérés alkalmával hasonló vagy talán még nagyobb eltérésre lehetünk elkészülve.

A hegyeknek a síkságok fölé emelkedésénél sokkal nagyobb tömegáttételt képvisel a kontinensek és az oczeáni medenczék különbsége. Az oczeánok feneke tudvalevőleg legföljebb kb. 9000 méterrel nyúlik a tenger szintje alá, de közepes mélységük is kitesz 4000 m-t. A kontinensek átlagos tengerszínfeletti magassága csak néhány száz métert tesz ki, (Supan szerint 700—800 m.), de ez a 4—5000 m-es szint-különbség koránt sem tekinthető elhanyagolható mennyiségnek a lapultsághoz képest, a melyet hossz-mértékben 21 km-nek vehetünk (a sphæroid nagy és kis fél tengelyének különbsége). Ehhez képest a hegy-alakulással járó tömeg-áttételek csekélynek mondhatók, mert a hegységek, mint a föntebbi középmagasságokból is láttuk, aránylag kis részét teszik a kontinensek tömegének. Itt azonban az erőnek nemcsak a tömeg-áttétel munkáját kellett elvégeznie, hanem az anyag ellenállását is legyőznie.

## III. Elmélet.

Ha a Földet a forgási tengely irányában valamely erő összenyomná, akkor nemcsak erőltetési vonalak keletkeznének rajta, hanem egyúttal lapultabbá is válna. Az összenyomáshoz hasonló jelenséget hozhatna létre a forgási sebesség növekedése is. A lapultságnak a forgási sebességgel való összefüggését már kétségen kívül helyezte s teljesen megvilágította a tudomány. Kisérlet, elmélet, megfigyelés e téren, mondhatni, teljesen födik egymást. Hogy a lapultság megváltozásával kétségtelenül együtt járó meridiánmenti feszültségek ugyanolyan erőltetési vonalakat hoznak-e létre, mint a nyomás vagy húzás, arra vonatkozólag még eddig nem végeztek kisérletet s így azt jelenleg legföljebb per analogiam, vagy elméleti úton lehetne bizonyitani. Az elmélet azonban még nem jutott el a gömbi erőltetési vonalakig, még csak a síklapú testeknél tart. Ez irányban tehát még a jövőben végzendő vizsgálatoktól kell várnunk a döntést.

A geophysika terén ellenben már most rendelkezünk annyi ismerettel, hogy kimutathatjuk oly erők létezését, a melyek a lapultság megváltozását előidézhetik. A lapultság ugyanis lényegileg a tengelyforgás sebességétől függ; ez pedig Földünk élete folyamán jelentékeny változásokon ment keresztül. Eltekintve a kétséges összehúzódástól, a mely a tengelyforgás gyorsitására vezet, szemeink előtt folynak le a tengerjárás tüneményei, a melyek a tengelyforgás lassitását eredményezik. Fölösleges visszamennünk a Darwintól kimutatott 3—5 órás periodusig, elegendő a jelenlegi napnak egy csekély törtrészszel való változását tekintetbe vennünk, hogy olyan feszültséget tételezhessünk fel, a mely elegendő legyen a szilárd kérgen erőltetési vonalak előidézésére.

Maga a contractió is elegendő volna arra, hogy erőltetési vonalakat létrehozzon; ezektől a vonalaktól azonban semmiféle szabályosság nem várható s nézetem szerint a földi törésvonalaknak már napjainkig megállapitott szabályossága is határozottan ellentmond a contractió-elméletnek.

Nehezebb, de annál tanulságosabb az elméletek szempontjából a ránczok elhelyezkedésének magyarázata. A lapultság megváltozása, vagy a tengerjárási jelenségek alapjára helyezkedve, mondhatjuk csökkenése a Föld egész felületén eloszló, mindenütt ugyanazon törvények szerint elhelyezkedő törésvonalakat követel. Ránczokat szintén előidézhet a lapultság megváltozása, de csak igen erős megszoritásokkal. A contractiót tekinteten kivül hagyva, most a köbtartalmat állandónak tekintjük, a mit annál inkább megtehetünk, mert a Föld belsejét az illetékes tényezők jelentékeny része cseppfolyósnak tekinti. Ugyanazon térfogat mellett a gömbnek van legkisebb felülete, a mint a gömbtől távolodik az alak, felülete növekszik, viszont a gömb felé közeledő sphæroid felülete kisebbé válik, a rajta levő kéreg kénytelen ránczokba gyűrődni, csak úgy mint a contractió esetében. A két gyűrődés között mégis lényeges különbség van. Állandó térfogat mellett a fölület a gömbnél éri el minimumát. Kétséget nem szenved, hogy az Egyenlítő hossza szintén. A lapultság csökkenésével az Egyenlítőre merőleges irányban ránczok alakulnak. Vizsgáljuk meg, mi történik a meridiánnal.

A meridián-ellipszis hosszát az Euler-féle megoldással számolhatjuk, a mely az ívhosszat kifejező integrált az excentritás hatványai szerint haladó sorba fejti:

$$S = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \cdots\right]. \quad 1)$$

Az excentricitás és a nagy tengely összefüggését az állandó köbtartalom elve adja:

$$a^3 (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = C = \text{constans}. \quad (2)$$

Ha az excentricitásnak (2)-ben kifejezett értékét (1)-be behelyettesítjük, akkor a meridián-ellipszis ívhossza számára egyváltozós függvényt kapunk.

Az így keletkezett sornak csak első két tagját tartva meg, csekély átalakítás után a

$$f(a) = \frac{\pi}{2}\left(3a + \frac{C^2}{a^5}\right) \quad (3)$$

egyváltozós függvényt nyerjük, a melynek minimumát a

$$f'(a) = \frac{\pi}{2}\left(3 - \frac{5C^2}{a^6}\right) \quad (4)$$

egyenlet szolgáltatja.

(4) szerint $f(a)$-nak a minimuma ott van, a hol

$$a_0^3 = \sqrt{\frac{5}{3}}\, C$$

és

$$1-\varepsilon_0^2 = \tfrac{3}{5}, \quad \varepsilon_0^2 = 0{,}4 \quad \text{vagy} \quad \varepsilon_0 = 0{,}6325.$$

Lássuk, mily összefüggésben vannak egymással $S$ és $f(a)$ függvények, illetve minimumaik.

Ha (2) egyenletből nem $\varepsilon$, hanem $a$ értékét helyettesítjük be (1)-be, akkor $S$ és $f(a)$ számára a következő alakokat nyerjük:

$$S=\frac{2\pi C^{\frac{1}{3}}}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{6}}}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5}-\cdots\right],$$

$$f(a)=\frac{2\pi C^{\frac{1}{3}}}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{6}}}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2\right],$$

$$S=f(a)-\frac{2\pi C^{\frac{1}{3}}}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{6}}}\left[\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5}+\cdots\right]=f(a)-L$$

$$S'=f'(a)-L',$$

ha $f'(a)=0$, akkor

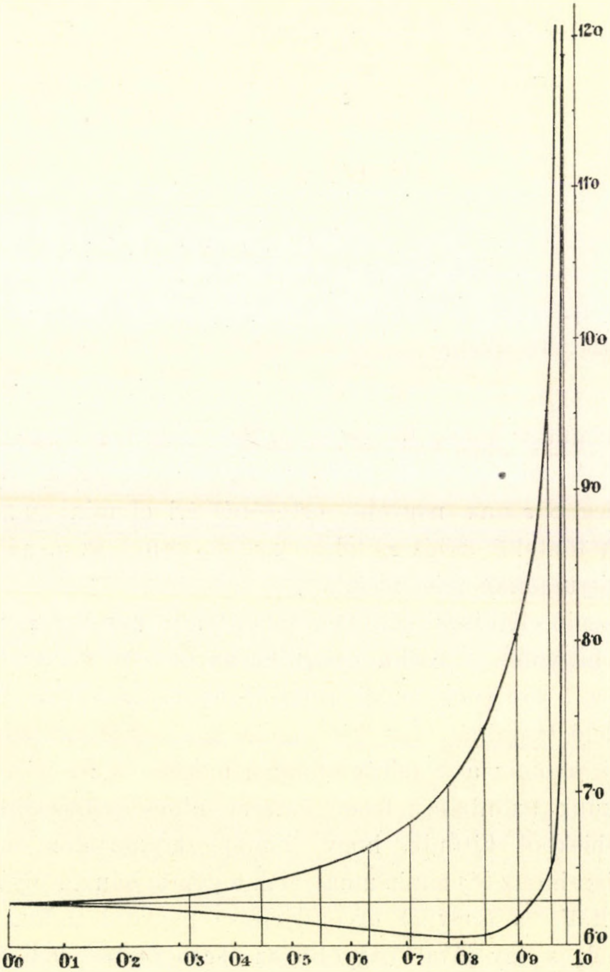
$$S'=-L'. \tag{5}$$

Mindaddig, a míg $0<\varepsilon<1$, $L'>0$; a mikor $f'(a)=0$, akkor $S'<0$. A míg $f'(a)$ negativ, addig $S'$ is negativ. (5)-ből kitetszőleg $S$ $\varepsilon$-nak nagyobb értékénél éri el minimumát, mint $f(a)$. A föntebb talált $\varepsilon_0$ tehát kisebb annál az $\varepsilon_1$-nél, a mely $S$ minimumának felel meg.

Hasonló eljárással könnyen találhatunk egy oly $\varepsilon_2$-t, a mely $\varepsilon_1$-nél nagyobb. E czélra szolgálhatna pl. egy summabilis hatványsor, a melynek tagjai rendről-rendre kisebbek $S$ sorának megfelelő tagjainál. Így két határ közé szoríthatnók azon $\varepsilon_1$ értéket, a mely a $S$ minimumának megfelelő $\varepsilon$-t jelzi.

Nekünk azonban a felső határra nincs szükségünk. Már a föntebbiekből kitűnik, hogy állandó köbtartalom mellett a meridián-hossz ($S$) minimumát nem a gömb, hanem oly sphæroid szolgáltatja, a melynek excentricitása nagyobb a fönt talált $\varepsilon_0$ értéknél, s így jóval nagyobb az excentricitás mai értékénél. WODETZKY dr. úr szíves volt numerikusan meghatározni a lapult és a nyúlt sphæroid meridián-hosszainak változásait állandó köbtartalom mellett a FRÖHLICH: Mathematikai repertorium 197. lapján található táblázat segítségével. Számításainak eredményeit a 10. ábra mutatja. Ezekből kitűnik, hogy $\varepsilon_0$ és $\varepsilon_1$ közt lényeges eltérés van.

A föntebbiek szerint a mostani körülmények közt a lapultság csökkenése folytán — állandó köbtartalom mellett — az




10. ábra. A lapúlt és a nyúlt sphæroid meridián-hosszának változása WODETZKY számításai szerint.

egyenlítőre merőlegesen ránczoknak, a meridiánokra merőlegesen tátongó hasadásoknak kellene keletkezniök.

Az egymásnak megfelelő egyenlítő-hosszabbodást és meridián-rövidülést igen könnyen számításba vehetjük, akár numerikusan is.

Az egyenlítő kerülete

$$A = 2\pi a,$$

$$dA = 2\pi da.$$

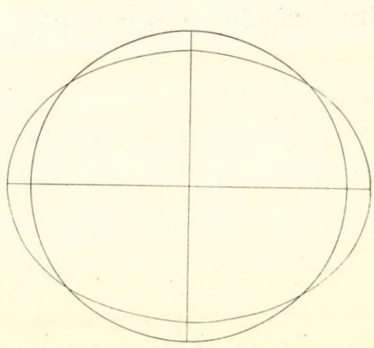
A meridián kerületéül, tekintve, hogy itt csekély lapultságú sphæroidról van szó, a (3) egyenletben definiált mennyiséget vehetjük, a melyet differencziálva, megkapjuk nagyjában a meridián változását a nagy tengely változásának egységében kifejezve:

$$df(a) = \frac{\pi}{2}\left(3-5\frac{C^2}{a^6}\right)da.$$

Ha a lapultság csekély, akkor $C^2 = a^6$-nak vehető s akkor

$$df(a) = -\pi da = -\tfrac{1}{2}\, dA. \qquad (6)$$

Ha csak akkora elváltozásokat veszünk tekintetbe, a mekkorák a hegységek kialakulásának magyarázatára szükségesek (az æquatori sugárnak 30—100 km-rel való változása), akkor a fenti elhanyagolások számba vehető hibát nem okoznak. Igy (6) alapján kimondhatjuk, hogy minden æquator-hosszabbodásnak félakkora meridián-rövidülés felel meg. Csak 200 km-re téve azt az összeszorulást, a mit a pacifikus hegyrendszer megyűrődése képvisel, a meridiánokra merőlegesen összesen 100 km szélességű hasadás-öveket kellene találnunk, a melyeket azután később láva tölthetett volna ki. Tekintve azonban azt, hogy a meridiánokra merőleges ránczok létezése határozottan megállapíttatott, a hasadásoknak még szélesebbeknek kell lenniök.



11. ábra. A gömbi és a minimális meridián-hossz állandó térfogat mellett.

Vulkanikus kőzetek, a melyek hasadásokon keresztül kerültek a felszínre, tényleg sok helyen találhatók a Föld felületén. Eddigi ismereteink alapján azonban korántsem állíthatjuk azt, hogy e vulkanikus kőzetek az egész Földet körülfogják. A parallelmenti ránczoknak már puszta létezése is ellentmond a ránczképződés ilyetén elméletének. Ez vagy azt jelenti, hogy a Föld belsejét nem szabad összonyomhatatlannak tekintenünk, vagy pedig azt, hogy a gyűrődések nem keletkezhettek lapultság-változás hatása alatt. Úgy látszik, a geografia mai állása mellett egyelőre le kell mondanunk a ránczok és hasadások egységes magyarázatáról.

A Föld felületén mutatkozó törésvonalak ellenben már az eddig végzett megfigyelések szerint oly szabályosságot tüntetnek fel, hogy szinte provokálják a lapultság-változással való magyarázatot s azzal kecsegtetnek, hogy a jövendő geologiai kutatásoktól az eddigieknek megerősítését várhatjuk. Tisztán az erőltetési vonalak alapján próbálkozni a lapultság-változás mértékének megállapitásával ma még korai volna s ezért numerikus számitásoktól egyelőre tartózkodtunk.

*Pécsi Albert.*

# A Mathematikai és Physikai Társulat tizenhetedik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 20-án kibocsájtott meghivójára a Mathe matikai és Physikai Társulat XVII. rendes közgyűlését f. évi május hó 4-én tartotta meg. A kitett névsor több vendégen kívül a következő tagok részvételét mutatja ki:

Balog Mór, Bauer Mihály, Benda Jenő, Csemez József, Demeczky Mihály, Dietz Lajos, Elekes István, br. Eötvös Loránd, Feichtinger Győző, Fekete Jenő, Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izor, Goldziher Károly, Grúber Nándor, Hanauer Jenő, br. Harkányi Béla, Hasenauer Jenő, Jánosi Imre, Kármán Ferencz, Kelemen Ignácz, Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Koschowitz Gyula, Kőnig Dénes, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lenkei Lehel, Lévay Ede, Marczell György, Massányi Ernő, Mikola Sándor, Nagy József, Oberle Károly, Obláth Richárd, Pécsi Albert, Pekár Dezső, Privorszky Alajos, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Riesz Frigyes, Róna Zsigmond, Selényi Pál, Skopál István, Sós Ernö, Steiner Lajos, Suták József, Szabó Péter, Szijártó Miklós, Szőke Béla, Szücs Adolf, Terlanday Emil, Tőtössy Béla, Visnya Aladár, Winter József, Wodetzky József, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1910-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

## A KÖZGYŰLÉS.

### 1. Elnöki megnyitó.

Báró Eötvös Loránd elnök megnyitja a közgyűlést és üdvözli a szép számban megjelent tagokat, a kik jóleső érdeklődéssel nem csupán rendes üléseinket kisérik, hanem Társulatunk administrativ teendőiben is figyelmesen részt vesznek.

A mult évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jelen ülés jegyzőkönyvének hitelesítésére Róna Zsigmond és Terlanday Emil tagtárs urakat kéri fel.

## 2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Ha két évvel ezelőtt Torricelli emlékének szenteltük egy esténket, Társulatunk tizennyolczadik évét sem rekeszthetjük be a nélkül, hogy a tudomány történetében fontos emléknapra ne tereljem rövid időre szives figyelmüket. 1909-ben mult háromszáz éve, hogy megjelent Keplernek híres műve: «Nova astronomia seu physica cœlestis tradita commentariis de motibus stellæ Martis», a mely a bolygó mozgás első két törvényét és elsejében implicite már a tömegvonzás Newton-féle törvényét tartalmazza. Ez utóbbit egyszerűbb módon csak a tíz évvel később talált harmadik törvényből sikerült kiolvasni. Hogy egyszerűen zárt pálya feltételezése közelebbi meghatározások nélkül nem vezet minden nehézség nélkül a Newton-féle törvényhez, mutatja eléggé a Bertrand-féle probléma.

E helyen teljesen fölösleges, hogy a bolygó mozgás első két törvényének közvetlen és közvetett hatásáról szóljak a mechanikára, de talán szabad felemlítenem, hogy a mathematikára is hatottak termékenyítőleg. A mellett, hogy Apollonius de Perga tanulmányait értékben növelték, a sormegfordítás problémájához vezettek és a Bessel-féle függvényekhez. És még termékenyebb volt talán a harmadik törvény keresésére fordított tíz év, a mely a szabályos geometriai testek tanát, a zeneelméletet, az optikát gazdagította és az empirismus és ismerettanban örökké emlékezetes decennium.

★

De térjünk vissza a jelenhez. Mult évi jelentésemben nem hallgathattam el, hogy folyóiratunk kissé csonkán maradt; örömmel jelentem ezúttal, hogy XVIII. kötete $26^1/_2$ ív terjedelmével a kénytelen hiányt bőven pótolta s hogy a szerkesztőség rendelkezésére már most levő kéziratok változatos és pontos folytatást igérnek. Tartalomjegyzéke tíz mathematikai és kilencz physikai értekezést sorol fel, mely egyoldalúság nélkül a tiszta és alkalmazott tudomány egész körében mozog.

Az elmult év folyamán hasonlóan változatos tárgysorozatú kilencz rendes ülésünk volt, a melyen hét mathematikai és tizenegy physikai előadást hallgattunk.

Jóleső örömmel értesültem az utolsó években arról, hogy nagyobb vidéki városokban kis mathematikai és physikai magánkörök keletkeztek, melyek közül néhány minden hivatalos jelleg nélkül hasznos és érdemes munkát végzett. A nélkül, hogy a törekvések centralisatiójának gondolatát felvetném, melyet egyenesen károsnak tartok, kérdezhetem, nem találhatnók-e módját, hogy e törekvéseket támogassuk és az érdemes munkát az elfeledéstől óvjuk?

Egy régi, de még lényegileg elintézetlen indítvány Társulatunk számára is vándorközgyűléseket javasolt. A mi mikrokosmusunkban ez a nemzetközi kongresszusoknak felelne meg, melyeknek most éljük korát. Társulatunk belső fejlesztése, a melyre a kívülről jövő anyagi támogatás most ingataggá lett volta miatt gondolnunk kell, a választmány feladata lesz és annak alig látom más és kellemesebb módját, mint ily gyűlések szervezését, melyeknek tartásában, noha az első gondolatjuk talán ebben a Társulatban fakadt, a Földrajzi Társaság és a Természettudományi Társulat megelőzött.

A XVI. tanulóversenyt 1909 október 9-én tartottuk meg. A versenyzők számát nézve az eredmény nem tetszett kedvezőnek, de minősége nem áll az addigi versenyeké mögött. Az első díjat Raj László, a másodikat Lukács Ferencz nyerte el. A göttingai egyetemen legutóbb tartott két magántanári habilitatio kétségtelenül tanulóversenyeinkre is vet némi fényt.

Tagtársaink száma az év végén 397 volt; ezek közül van 185 budapesti és 212 vidéki tag. Az előfizetők száma 86. Immár 18 év tapasztalatára támaszkodva bizonysággal mondhatjuk, hogy e szám a Társulat jelenlegi berendezése mellett egynéhány százalékon belül állandó marad. A folyton fokozódó igényekkel szemben, elsősorban az emelkedő nyomdai költségekre gondolok, alig tehetünk mást, minthogy alkalmas módot keressünk a Társulat kereteinek sympathikus tágítására, a mire már feljebb is czéloztam.

Ez idén még kikerülte Társulatunk azt a súlyos csapást, a melyet rá az akadémiai segély megvonása mérhetett volna s mely alatt egynéhány testvértársunk már szenved. Hálás köszönetet mondunk tehát a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának és Mathematikai és Természettudományi Bizottságának 2000 korona segélyeért, a mely a tagdíjainkból várható maximumjövedelmünk kétharmadát, valójában pedig 83 százalékát teszi. E segély megvonása Társulatunkat folyóiratától fosztaná meg és ezzel mathematikai és physikai társalkodókör szerepére szorítaná.

Nagyon kérjük tehát a Tudományos Akadémiát, hogy bennünket e reánk nézve életfeltételt tevő segítségben tovább is kegyesen részesíteni méltóztassék.

Nem zárhatom be jelentésemet a nélkül, hogy meg ne emlékezzem a súlyos csapásról, melyet a halál keze Társulatunkra az elmult évben is mért. Elhúnytak: Fehér Ipoly, Fogarasi Béla, Gothard Jenő, Groó Vilmos, Klúg Nándor, Schenek István és Szabó János tagtársaink, a kiknek emlékét kegyeletesen megőrízzük.

Hálát mondva igen tisztelt kartársaimnak és munkatársainknak, a kik feladatainkat mindenkor a legkészségesebben támogatták, kérem a Tisztelt Közgyűlést, hogy e jelentésemet szíves tudomásul venni méltóztassék.

Budapest, 1910 május hó 4-én. *Kövesligethy Radó.*

## 3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1910-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Lévay Ede pénztárnok előterjeszti az alábbi zárszámadást, vagyon-mérleget és költségelőirányzatot, melyeket tételenkint megmagyaráz és indokol.

Az ügyvivő titkár felolvassa az 1910 május 1-én kelt, Balog Mór és Bogyó Samu a közgyűlés részéről kiküldött pénztárvizsgálók jelentését, a mely így hangzik: «A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk».

A közgyűlés e jelentéseket meghallgatván, megadja a pénztárnoknak a felmentvényt, neki, valamint a pénztárvizsgálóknak fáradozásukért köszönetet mond és tudomásul veszi a költségelőirányzatot. Elnök a pénztár vizsgálására a közgyűlés részéről újból Balog Mór és Bogyó Samu tagtárs urakat kéri fel.

## 5. Választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a választmányból kilépnek Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László és Tőtössy Béla választmányi tagok.

Elnök felfüggeszti a választás idejére a közgyűlést és Visnya Aladár elnöklete mellett Goldziher Károly és Kőnig Dénes tagtársakból álló szavazatszedő bizottságot küld ki.

A választás megejtetvén, a bizottság elnöke jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 37 szavazat közül Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László és Tőtössy Béla egyenkint 36 szavazatot nyert, a minek folytán a kilépett választmányi tagok egyhangúlag újra megválasztattak.

### 6. Indítványok.

Elnök úr jelenti, hogy az alapszabályoktól követelt határidőn belül indítvány nem érkezvén be, a napirend utolsó pontja elesik.

Ezzel a tárgysor ki lévén merítve, elnök a XVII. közgyűlést berekeszti.

*

A közgyűlést rendes előadó ülés követte, melyen Kürschák József «A hatványsorok számelméleti analogonjáról», Róna Zsigmond «Az újabb kutatások alapján a felsőbb légrétegek hőmérsékleti viszonyairól» értekezett.

*

Másnap a közgyűlésen résztvevők az új műegyetem épületeit és gyűjteményeit tekintették meg Jónás Ödön prorector és több műegyetemi tanár szeretetreméltó kalauzolása mellett.

*1909. évi*

| BEVÉTEL | Előirányzat Kor. | fill. | Eredmény Kor. | fill. |
|---|---|---|---|---|
| 1907. évi zárszámadási maradvány | 2146 | 16 | 2146 | 16 |
| Folyó és köv. évi tagdijak | 2400 | — | 1098 | 08 |
| Hátralékos tagdijak | 1200 | — | 938 | — |
| M. Tud. Akadémia segélye | 2000 | — | 2000 | — |
| Hirdetési dijak | 200 | — | 300 | — |
| Kamatok | 550 | — | 580 | 38 |
| Előfizetési dijak | 700 | — | 556 | — |
| Vegyesek | | | 351 | 02 |
| | | | 7969 | 64 |

*Vagyon-*

| VAGYON | 1908. év végén Kor. | fill. | 1909. év végén Kor. | fill. |
|---|---|---|---|---|
| Forgó tőke: | | | | |
| Készpénz | 704 | 58 | 970 | 20 |
| Leszám. és pénzv. bankban takp. betét | 48 | 80 | 48 | 80 |
| M. kir. postatakarékpénztárban | 212 | 78 | 1044 | 08 |
| Leszám. és pénzv. bank letétszámláján | 1180 | — | 584 | — |
| Alaptőke: | | | | |
| Leszám. és pénzv. bank letétszámláján: | | | | |
| *a)* Készpénz | 880 | — | 880 | — |
| *b)* 2600 K névért. főv. kölcsönkötv. | 2262 | — | 2262 | — |
| *c)* 100 « « koronajáradék-kötv. | 100 | — | 100 | — |
| Első hazai takarékpénztári betét | 108 | — | 108 | — |
| Majthényi Ottó-féle hagyaték | 10000 | — | 10000 | — |
| Tagdijhátralék | 1300 | — | 1500 | — |
| Föl nem vett hirdetési dij | 200 | — | — | — |
| | 16996 | 16 | 17497 | 08 |

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

A választmány megbizásából: *Köveslıgeth*

*Rátz László* s. k. *Beke Manó dr.* s. k. ügyvi

*1910. évi költség-*

| BEVÉTEL | 1909. évi előirányzat Kor. | fill. | 1910. évi előirányzat Kor. | fill. |
|---|---|---|---|---|
| Zárszámadási maradvány | 2146 | 16 | 2647 | 08 |
| Folyó és köv. évi tagdijak | 2400 | — | 2400 | — |
| Hátralékos tagdijak | 1200 | — | 1200 | — |
| M. Tud. Akadémia segélye | 2000 | — | 2000 | — |
| Hirdetési dijak | 200 | — | 100 | — |
| Kamatok | 550 | — | 550 | — |
| Előfizetési dijak | 700 | — | 700 | — |
| Hiány | 937 | 84 | 1408 | 41 |
| | 10134 | — | 11005 | 49 |

zárszámadás.

| KIADÁS | Előirányzat Kor. | fill. | Eredmény Kor. | fill. |
|---|---|---|---|---|
| Nyomdai költségek a mult évre | 2000 | — | 1400 | — |
| a folyó évre | 3400 | — | — | — |
| Irói tiszteletdijak a mult évre | 1074 | — | 1205 | 50 |
| a folyó évre | 2600 | — | 1771 | — |
| Expeditió- és irodai költségek | 900 | — | 726 | 72 |
| Középiskolai tanulóverseny | 160 | — | 158 | — |
| Vegyesekre | | | 61 | 34 |
| Pénztári maradvány *a)* készpénzben | | | 970 | 20 |
| *b)* takarékp. betétben | | | 1676 | 88 |
| | | | 7969 | 64 |

nérleg.

| TEHER | 1908. év végén Kor. | fill. | 1909. év végén Kor. | fill. |
|---|---|---|---|---|
| Nyomdai tartozások | 2000 | — | 3216 | 49 |
| Irói tiszteletdijak | 1074 | — | 829 | — |
| Tiszta vagyon | 13922 | 16 | 13451 | 59 |

Budapesten, 1910 május 1-én.

adó dr. s. k.
kár.

A közgyülés megbizásából:

*Bogyó Samu* s. k. *Balog Mór* s. k.

előirányzat.

| KIADÁS | 1909. évi előirányzat Kor. | fill. | 1910. évi előirányzat Kor. | fill. |
|---|---|---|---|---|
| Nyomdai költség a mult évre | 2000 | — | 3216 | 49 |
| a folyó évre | 3400 | — | 3400 | — |
| Irói tiszteletdijak a mult évre | 1074 | — | 829 | — |
| a folyó « | 2600 | — | 2600 | — |
| Expeditió- és irodai költségek | 900 | — | 800 | — |
| Középisk. tanulóverseny | 160 | — | 160 | — |
| Vegyesekre | | | | |
| | 10134 | — | 11005 | 49 |

*Dr. Lévay Ede*
pénztárnok.

# IRODALOM.

**Differencziál- és integrálszámítás**, a m. kir. vallás- és közoktatásügyi minisztérium megbizásából irta dr. BEKE MANÓ; első kötet (VI + 539 l.); Budapest, Franklin-társulat kiadása, 1910.

Hasznos szolgálatot tett BEKE MANÓ mathematikai oktatásunknak és első sorban az egyetemi hallgatóknak most megjelent kézikönyvének megírásával.

Ilyen munkának, melynek hivatása, hogy a csupán középiskolai ismeretekkel rendelkező olvasót és hallgatót mint *első mathematikai könyve* vezesse be e tudományba, mindenesetre nagy nehézségekkel kell megküzdeni épen a mai időkben, midőn egyrészt a pædagogiai, másrészt a tudományos szempont olyannyira különböző, sőt ellentétes kötelességeket ró a szerzőre.

Valóban a mathematika pædagogusainak mind hatalmasabban fejlődő nemzetközi mozgalma most már nem csak az ú. n. «általános műveltség»-et czélzó mathematikai oktatásban, hanem a leendő szakembernek szóló, egyetemi oktatásban és tankönyvekben is a pædagogiai szempontot a tudományos szempont fölé kivánná helyezni és a könyebb érthetőség és szemlélhetőség kedvéért hajlandó volna még a definicziók és bizonyítások szabatosságát is feláldozni és bebizonyítás helyett gyakran «plauzibilissá tevés»-sel megelégedni.

Merőben ellenkező utasításokat kap azonban ma egy differencziálszámítás szerzője, ha nem a modern pædagogiai elvekhez fordul, hanem a mathematika alapjaira vonatkozó legújabb kutatásokat vizsgálja. Ekkor nem csupán arra az eredményre fog jutni, hogy a szabatosság minden mathematikai könyvnek — legalább a mi a szakembernek szólókat illeti — a legfőbb kelléke, hanem arról is meg fog győződni, hogy az eddiginél még nagyobb preczizitás követelendő és ott is, hol a szemlélet még nem rég megtámadhatatlannak látszó eredményekre vezetett, ma már szigorú logikai dedukczióra van szükség.

Annál nehezebb dolga volt e két irányzat közt a szóban forgó munka szerzőjének, hogy míg ő maga — mint egyéb működéséből jól tudjuk — (legalább a középiskolát illetőleg) egyik buzgó harczosa az említett pædagogiai mozgalomnak, addig a magyar felsőbb mathematikai oktatás tradiczióinak kétségtelenül a logikai irányzat felé kellett munkáját terelniök.

E két irány összeegyeztetésének nehéz munkája elől a szerző sehol sem iparkodott kitérni, hanem mindig a szabatosság feláldozása nélkül törekszik a könnyű megérthetőségre. E czélból gyakran a definicziókat, sőt bizonyításokat is előbb «népszerűbb» alakban fogalmazza meg és a pontos fogalmazást csak ezután adja; a tételeket előbb bizonyos (nem szükséges) megszorításokkal mondja ki és csak aztán tér át az általános esetre. (Csak ROLLE tételénél, a 120/1. lapon, találjuk a fordított sorrendet, de itt is a tétel geometriai jelentése vezeti be a tárgyalást.) A geometriai szemléletet gyakran segítségül hivja, de nem mulasztja el több izben megemlíteni a fogalomalkotásoknak e szemlélettől való függetlenségét. Azt az engedményt azonban többnyire megteszi a szerző a preczizitás ellenfeleinek, az «alkalmazó» mathematikusoknak, hogy a singuláris eseteket (határérték *nem* létezése, stb.) kivételeseknek tünteti fel, habár mathematikailag mindig ezek képviselik az általános esetet.

A pontosságot és érthetőséget természetesen a számfogalom felépítésénél a legnehezebb a kellő harmóniába hozni. A szerző azonban a raczionális számok elméletét könyve elején már elintézettnek tekinti. És ha ma már nem lehet is a közönséges egész számok elméletét, mint nem a mathematikába tartozót, negligálni, mégis jogosultnak mondható ez az eljárás olyan könyvben, mely adott keretben olyan messzire akarja vinni olvasóját, a mennyire BEKE MANÓ könyve valóban elviszi.

A szerző tehát az irraczionális számok bevezetésével nyitja meg könyvét. DEDEKIND módjára szeletalkotással értelmezi ezeket és ennek alapján állapítja meg ezen új számok kisebb-nagyobb voltát is. Majd áttér az irraczionális számoknak szabályos számsorozattal való megadására. Az ily sorozatok értelmezése czéljából bevezeti «*limes superior* és *inferior*» fogalmát (*főszármazékhelyeknek* nevezi őket a szerző). Czélszerű lett volna talán előbb általában a «sűrűsödő hely» fogalmát bevezetni (hiszen ez szerepel az 5. pont czímében is) és ekkor meg lehetett volna említeni, hogy e két főszármazékhely egyszerűen a legnagyobb, illetve legkisebb sűrüsödő hely. — A szabályos számsorozatok bevezetésénél a szerző elemeiket mint raczionális számokat vezeti be. A 8. és 9. pontban is még ily kifejezésekkel találkozunk: $|a_{n+k}-a_n|$ és így az $a$-k itt is bizonyára raczionális számokat jelentenek, miután a kivonás és abszolut érték képzése irraczionális számokra itt még értelmezve sincs (a kivonásra nézve ezt a 30. l. a szerző is megemlíti). Jó lett volna tehát az $a$-k raczionális voltát e pontokban is megemlíteni, annál inkább, mert a 20. l. első kisbetűs sorában («eddigelé főként oly számsorozatokról beszéltünk, melynek tagjai raczionális számok») a «főként» szó félreértésekre adhat okot. — Ezután következik a szab. sorozattal megadott irraczionális számokra a műveletek értelmezése, igen szabatos módon, ámde — miután szeletalkotással és nem CANTOR módjára: a szabályos sorozatokkal lettek az irraczionális számok megteremtve — ez által csupán akkor lennének e műveletek bizonyára *minden* valós számra értelmezve, ha előbb ki lett volna mutatva, hogy *minden valós szám szabályos számsorozattal értelmezhető*. Csak ezen tétel bebizonyítása által válna a tárgyalt elmélet teljessé. — Ezután következik a mondottaknak tetszőleges valós számokból álló sorozatra való kiterjesztése, néhány egyszerű limes kiszámítása és raczionális törtfüggvény értelmezése a változó irraczionális értékeire. Az első fejezetet gondosan megválasztott feladatok fejezik be, melyek kiválóan alkalmasak a limesfogalom megvilágítására.

A II. fejezetben az általános függvényfogalom megállapítása után a függvények határértékének megállapítása következik. A helyettesítési érték és határérték összezavarása kétségtelenül minden kezdő mathematikusnak már nehéz órákat szerzett és a szerző többnyire igen világosan rámutat e két fogalom közti különbségre. Hiszen $\lim\limits_{n=\infty} f(a_n)$-nek (hol $\lim\limits_{n=\infty} a_n = a$) semmi köze sincsen $f(a)$-hoz. Nem czélszerű ezért $\lim f(a_n)$-et «az $a$-hoz tartozó függvényértéknek tekinteni» (43. l., 2. sor); igaz, hogy a könyv itt következő szavai ezt a beszédmódot pontosabban megmagyarázzák. — A $\infty$ helyre vett és $\infty$ értékű határértékek értelmét a szerző a geometriai szemlélet segítségével teszi különösen világossá. A folytonosság fogalma s a folytonos, monoton és inverz függvények tulajdonságai — melyeknek tárgyalása most következik — a határértékekre vonatkozó részletes fejtegetések után bizonyára nem fognak már az olvasónak különösebb nehézségeket okozni. E fejezetben találjuk a határértékszámítás általános elveit és néhány fontos határérték tényleges kiszámítását. Ellenben az elemi függvények folytonosságának bebizonyítását, $a^x$ és $x^n$ (80—81. l.) kivételével, nem találjuk itt.

A differencziálhányados általános bevezetését e fogalomalkotás természetes voltának és szükségszerűségének mechanikai és geometriai megvilágítása előzi meg, majd a legegyszerűbb differencziálási szabályok következnek. Az arcsin. $x$, stb. függvények formális differencziálásának jelentése, tekintettel e függvények többértékű voltára, bővebb magyarázatokra szorul (112. lap). — A szerző kiterjeszkedik itt a folytonosság és differencziálhatóság egymásközti viszonyára és egy példa (135.) keretében még arra is rámutat, hogy bármily közel marad is két függvény egymáshoz, differencziálhányadosuk különbsége mégis bármily nagygyá válhat.

A IV. fejezetet a középértékek szigorú tárgyalása vezeti be. A 122—3. l. jegyzetéhez azonban megjegyzést kell tennünk. Itt a szerző a függvények egy oly tulajdonságát említi fel, melyet némelyek régente «folytonosság»-nak neveztek. A szerző kétségtelenül $f(x)$ következő tulajdonságára gondolt: «bármily két számot jelent is $\alpha$ és $\beta$ az $ab$ szakaszban ($\alpha<\beta$), az $f(x)$ minden $f(\alpha)$ és $f(\beta)$ közti értéket felveszi az $\alpha\beta$ szakaszban». Némely régi szerző ezt valóban elegendőnek tartotta $f(x)$-nek $ab$-beli folytonosságához. Hogy azonban innen nem következik a Cauchy-féle folytonosság, sőt hogy e mellett lehetséges, hogy a függvény sehol sem folytonos, azt csak egy meglehetősen bonyolult példával (Darboux adott ilyet) lehet kimutatni. — A magasabb differencziálhányadosok tárgyalásánál nem mulasztja el a szerző $f''(x)$-et közvetlenül $f(x)$ segítségével is megadni, a megfelelő formula szükséges feltételeinek megemlítésével. Rendkívül bő és tanulságos anyagú példatár járul ezekhez az általános fejtegetésekhez; már itt megismerkedik pld. az olvasó a differencziálegyenlet fogalmával és egyáltalában vonzó kilátása nyilik az analizis magasabb fejezetei felé.

Az V. fejezet első része a véges Taylor-sort és geometriai alkalmazásait tárgyalja; gyakori (tankönyvekben is előforduló) tévedéseket oszlat el itt a szerző azáltal, hogy rámutat a «legnagyobb érték» és «relativ maximum» fogalmának különbségére. E fejezet második része interpolácziószámítással foglalkozik és pedig sokkal bővebben, mint hasonló kézikönyvekben szokásos. A szerzőnek itt bizonyára a tárgy praktikus alkalmazásának fontossága lebegett szeme előtt. Erre mutat az a néhány példa is, mely a maradéktag numerikus megbecslésére vonatkozik. A szokásos Lagrange-féle interpoláczión kívül Newton, Ampère, stb. interpoláló módszerével is megismerkedünk itt és az olvasó bő ismereteket szerez a — differencziálszámítás története szempontjából is fontos — differencziaszámítás köréből. Még messzebb vezetik az olvasót az ide szóló feladatok; hogy csak egyet említsünk, még a Jensen-féle convex függvényeket is megtaláljuk itt. A szerző néhány saját vizsgálatát is felvette itt könyvébe.

A következő fejezet, a «határértékek kiszámítása», e kissé tág czímen a függvények oly helyen való határértékének kiszámításával foglalkozik, hol a közvetlen helyettesítés $\frac{0}{0}$ s más hasonló határozatlan alakokat szolgáltatna. Czélszerű lett volna talán itt felemlíteni, hogy a függvények értelmezése ilyen singuláris helyen úgy történt, hogy a függvény e helyen folytonos lesz, a mi az eredetileg mesterkéltnek látszó megállapodást természetesebbé tenné. A korlátlanul növekvő függvények asymptotikus viselkedésének összehasonlítása következik most, BOREL legújabb függvénytani munkájának felhasználásával, a ki az ily függvények növekedésének jellemzéseül a transfinit számokat vezeti be; $x$, $x^2$, $x^3$,... rendszáma 1, 2, 3,... lévén $e^x$-hez rendszámul a legkisebb transfinit számot $\omega$-t, $xe^x$-hez $\omega+1$-et, stb. rendeli. Miután azonban — ha bármily függvény tekintetbe jöhet — $x$, $x^2$,... után nem közvetlenül $e^x$ következik a végtelenbe növekedés szempontjából, ép oly jogosult volna $\omega$-t mint $\frac{e^x}{l.x}$ vagy $e^{e^x}$ függvény stb. rendszámát bevezetni. Továbbá az így bevezetett transfinit számok, bár BOREL CANTOR-féléknek nevezi őket, ezekkel egyáltalában nem egyeznek meg, ha műveleti szabályukat is tekintjük, mert míg BOREL-nél összeadásuk commutativ, addig az igazi transfinit számoknál $\alpha+\beta$ és $\beta+\alpha$ általában különböző. Hangsúlyozni akarjuk, hogy e megjegyzések inkább BOREL, mint BEKE tárgyalására vonatkoznak. — A «végtelen nagy»-okéhoz hasonló tárgyalásban részesülnek a «végtelen kicsiny»-ek is. A *differencziál* kényes fogalmára nem is igen volna szükség és félreértésekre adhat okot, hogy a szerző a *szimbolikus* jelzést nem betű szerint olvastatja (236. l.). E fejezetet az asymptota bevezetése zárja be, kitüntetve azt is, hogy e fogalom nem minden görbénél fedi az ú. n. végérintő fogalmát.

A határozott integrál geometriai jelentésének előkészítése czéljából a szerző a polygonok területének értelmezésére HADAMARD elegáns eljárását ismerteti. És ez talán az egyetlen helye a könyvnek, hol a szerzőt a történeti és didaktikai szempont mellőzésével lehetne vádolni. Pedig talán a terület fogalma az a mathematikai fogalom, melyről a laikus a legjobb képet alkotja magának. Hiszen, a ki csak azt tudja, hogy kongruens idomok területei egyenlők és azt, hogy minden idom területe egyenlő részei területének összegével, az már tökéletesen ismeri a terület fogalmát. Ezt mutatja meg polygonokra pld. épen HADAMARD, postulatumként fogadva el e két követelmény kielégíthetőségét. Egy külön függelékben aztán *H.* megmutatja, hogy e postulatum feltételezésére nincs is szükség. Az által, hogy a szerző *csupán* a függelék anyagát vette fel könyvébe a (háromszög-) terület megállapítása nála nagyon önkényesnek látszik. — A határozott integrál bevezetését megelőzi továbbá nehány görbevonalú terület kiszámítása; a szerző maga megjegyzi (255. l.), hogy ezuttal nem foglalkozik azzal, hogy másként specializálva az eljárását nem kapna-e más számot a terület mérőszámáúl. — A RIEMANN-féle határozott integrál értelmezését az integrálhatóság feltételeinek bő vizsgálata követi, melynek folyamán JORDAN «à variation bornée»-függvényeivel és főtulajdonságaikkal is megismerkedünk. E fejezet tartalmazza a primitiv függvény és határozatlan integrál elméletét is. Rámutat itt a szerző arra is, hogy e két fogalom nem folytonos függvényeknél szétválhatik és általában pontos existentia-vizsgálatokkal kiséri fejtegetéseit. (A 292. l.-ra mégis becsúszott, hogy «$f(z)$-függvénynek végtelen sok primitiv függvénye van», pedig $f(z)$ semmi megszorításnak nem volt alávetve.) De nem csak az elmélet alapjaira vonatkozó kutatások tüntetik ki e fejezetet, hanem a szerző sokszor túl is halad az integrálszámítás első elemein. E szempontból csupán a raczionális törtfüggvények HERMITE módszerével való integrálására és a LEGENDRE-féle polynomokra akarunk rámutatni. Természetesen e fejezetet is sok kidolgozott példa kiséri. Az ide vonatkozó gyakorlatok (a XIII. fej. végén) megismertetik az olvasót a FOURIER-féle sorok együtthatójaként fellépő határozott integrálokkal, a gammafüggvényekkel, FEJÉR középértéktételével, az $e$ transcendens voltának HURWITZ-féle bizonyításával — hogy csupán a legfontosabbakat említsük.

A VIII. fejezet az V. fejezet folytatásaképen a mechanikus quadratusának van szentelve és e vizsgálatok praktikus fontossága mindenesetre jogosulttá teszi az integrálok közelítő meghatározásának ilyen részletes tárgyalását.

A következő fejezet a határozott integrál fogalmának kiterjesztését adja arra a két esetre, midőn 1. az integrál határa: $\infty$ és 2. az integrandus az integrálási számközben végtelenné válik. Megismerkedünk az ily integrálok létezésének szükséges és elegendő feltételeivel. Talán czélszerű lett volna azonban megemlíteni, hogy *új* definicziók bevezetését az teszi szükségessé, tehát jogosulttá, hogy az eredeti (RIEMANN-féle) definiczió ez esetekben felmondja a szolgálatot.

A paramétert tartalmazó integrálok és e paraméter szerint való differencziálásuk tárgyalása (X. fej.) után a XI. fejezet «néhány fontos intregrál kiszámításá»-t adja. E speciálisabb vizsgálatokból csupán a folytonos függvényeknek polynomokkal való megközelítésére vonatkozó WEIERSTASS-féle tétel tárgyalására akarunk rámutatni.

A XII. fejezet az elliptikus és hyperelliptikus intergrálók elméletének alapjait nyujtja.

Habár a szerző, a hol csak alkalma nyilik, rámutat fejtegetéseinek geometriai jelentésére, még egy külön fejezetben is foglalkozik az integrálszámítás geometriai aikalmazásaival: a terület és ívhosszméréssel (polárcoordinátákban is) és pontosan ismerteti a görbe rektifikálhatóságának szükséges és elegendő feltételeit.

Az utolsó fejezet a complex számoknak, mint számpároknak, adja az elméletét. Talán jobban helyén való volna e fejezet már az I. fejezet után, nem csak tárgyának egyszerűsége miatt, hanem első sorban, mert a raczionális törtfüggvények integrálásánál és egyéb helyeken is a complex szám fogalma már lényegesen szerepel. Az idetartozó gyakorlatok már a complex változó függvényeinek általános elméletét látszanak előkészíteni, a mely elmélet — mint az előszóból megtudjuk — a többváltozós függvények és végtelen sorok elméletével együtt a munka második kötetének fogja anyagát alkotni.

Külön meg kell itt még egyszer említenünk az egyes fejezeteket bezáró «feladatok és gyakorlatok» czímű pontokat, melyeket a szerző széles körültekintéssel és nagy irodalmi anyagnak felhasználásával állított össze. E feladatok igazán alkalmasak arra, hogy az olvasó ne tekintse munkáját befejezettnek, midőn a «Differencziál- és integrálszámítás»-t elolvasta, hanem ennek elolvasása további tanulmányokra sarkalja.

Nem kevésbbé fogja a kezdőnek szeretetét a tárgy iránt növelni a könyvnek rendkívül eleven előadásmódja, mely rendszerint sikeresen enyhíti a bevezetett fogalmaknak és tételeknek a kezdőre nézve annyira absztrakt voltát.

Nem hagyhatjuk említés nélkül ama jól összeállított irodalmi jegyzékeket sem, melyek az egyes fejezeteket kisérik. Nem csupán a szerző forrásmunkáit találjuk itt meg, hanem az egyes részletek további tanulmányozására ajánlható műveket is.

Az a lelkes odaadás, mely e könyv minden részéből kiviláglik, jogosulttá teszi abbeli reményünket, hogy a szerző munkájának folytatását is mielőbb közre fogja adni. Kőnig Dénes.

*Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.*

# Kimutatás.

*az 1910. évi május hó 1-től november hó 30-ig befolyt díjakról.*

Tagsági díjat fizettek :

**1907. évre** : Dörnyey Károly 6 kor. Összesen ... ... ... ... K 6.—

**1908. évre** : Andor Tivadar 10 kor., Bodola László 6 kor., Dombay Nárcisz 6 kor., Égly Sándor Károly 6 kor., Kleiszner Rezső 10 kor., dr. Kovács János 10 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... K 58.—

**1909. évre** : Andor Tivadar 10 kor., Baló Gyula 6 kor., Csemez József 10 kor., Dombay Nárcisz 6 kor., Kleiszner Rezső 10 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Prokesch Ignác 6 kor., Riesz Frigyes 10 kor., Vajnoczky István 6 kor., dr. Visnya Aladár 6 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... K 80.—

**1910. évre** : Bozzay Zoltán 10 kor., Csízhegyi Lajos 6 kor., Csopey László 10 kor., dr. Fodor László 6 kor., Gáti Béla 10 kor., Heller Richárd 6 kor., dr. Jánosi Imre 10 kor., dr. Kelemen Ignác 10 kor., Karai Sándor 6 kor., ifj. Léber Gyula 6 kor., Lendvay Hugó 6 kor., dr. Lóky Béla 6 kor., Markos Imre 6 kor., Németh János 6 kor., Obláth Richárd 10 kor., Péch Aladár 10 kor., dr. Pécsi Gusztáv 6 kor., Pogány Béla 6 kor., dr. Riesz Frigyes 10 kor., dr. Riesz Marcell 10 kor., Salamon Ernő 6 kor., Szabó Lajos 6 kor., dr. Szabó Péter 10 kor., Szemethy Béla 10 kor., Széky István 6 kor., Szmodics Kázmér 6 kor., dr. Szűcs Adolf 10 kor., Ulreich Ede 6 kor., Vajnoczky István 6 kor. Összesen ... ... ... ... K 222.—

**1911. évre** : Dr. Layer Antal 6 kor., Németh János 6 kor. Pap János 10 kor., dr. Pécsi Gusztáv 4 kor., Petry Gyula 6 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... K 32.—

**1912. évre** : Németh János 4 kor. Összesen ... ... ... ... ... K 4.—

Előfizetési díjat fizettek :

**1910. évre** : Debreczeni ref. főgimn. fizikai szertára 10 kor., Máramarosszigeti ref. főgimn. 10 kor., Podolíni kegyesrendi gimn. 10 kor., Szabadkai főgimn. 10 kor., Szatmárnémetii polg. isk. tanítónőképző 10 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... K 50.—

| | *Összesen befolyt* | Jan. 1-től. |
|---|---|---|
| Hátralékokból ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... | K 144.— | K 908.— |
| F. és köv. évi tagsági díjakból ... ... ... ... ... | K 258.— | K 1206.12 |
| F. évi előfizetési díjakból ... ... ... ... ... ... ... | K 50.— | K 612.— |

Budapesten, 1910. évi november hó 30-án.

*Dr. Lévay Ede, pénztárnok.*
VI., Nagy János-utca 37. sz.

## Kérelem.

A Mathematikai és Physikai Lapok jelen füzetéhez postai befizető lapot mellékeltem. Felkérem a Társulat igen tisztelt tagjait és előfizetőit, hogy a mellékelt befizető lapot előző évi hátralékos és illetőleg most már esedékes f. évi tagsági dijaik befizetésére felhasználni sziveskedjenek, annyival is inkább, mert a be nem folyó díjakat december hóban póstai megbízás útján fogom bekérni, ami költségtöbbletet okoz. Kérem egyszersmind az igen tisztelt tagokat arra is, hogy minden lakhely, vagy lakásváltoztatásról levelezőlapon értesíteni sziveskedjenek, hogy a füzetek szétküldése körül zavarok ne támadjanak.

Budapesten, 1910. évi november hó 30-án.

*Dr. Lévay Ede, pénztárnok.*
VI., Nagy János-utca 37. sz.

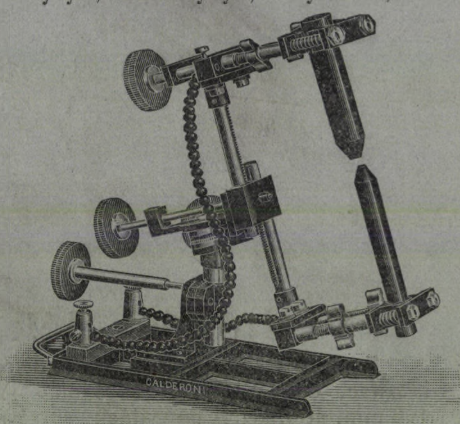
# Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.

**Elektromos ívlámpa** legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—




**Elektromos ívlámpa** egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

**Borszesz-izzófénylámpa** légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

**Háromlábu asztalállvány,** mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110.**—

**Vetitési ernyő** finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

**Ernyő-állvány** fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30.**—

**Vetitési ernyők** zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők :

| | 200 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 cm. négyzetben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ára | **45.**— | **65.**— | **90.**— | **145.**— | **200.**— | **240.**— korona. |

**Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.**

*Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.*

Franklin-Társulat nyomdája

# MATHEMATIKAI

ÉS

# PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

TIZENKILENCZEDIK ÉVFOLYAM

VIII. FÜZET 1910 DECZEMBER

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1910.

# TARTALOM.



---

**A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.**

---

**Társulati mondanivalók.** A tizenkilenczedik társulati év 1910 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Lévay Ede* főgymnasiumi tanár (VI., Nagy János-utcza 37.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

*Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.*

**Rendes ülések.** A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivő titkár czímére **VIII., Sándor-utcza 8.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

*Igen tisztelt munkatársainkat* értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

---

☞ **A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.**

# HATVÁNYSOROK ÖSSZEGEZHETŐSÉGÉNEK SZÜKSÉGES ÉS ELEGENDŐ FELTÉTELEIRŐL.

FROBENIUS[1] és HÖLDER[2] vizsgálatai óta tudjuk, hogy ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

végtelen sor a $k$-adrendű arithmetikai középérték-képzés módszerével[3] összegezhető, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2}$$

hatványsor legalább is az egységkörben konvergens és (1) arithmetikai összege $A$ lévén,

$$\lim_{\rho=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = A \tag{3}$$

CESARO[4] vizsgálatai alapján az is ismeretes, hogy ha (1) $k$-adrendű arithmetikai összege létezik és $A$-val egyenlő, akkor a

---

[1] FROBENIUS: Über die Leibniz'sche Reihe. Crelle's Journal, 89. k.

[2] HÖLDER: Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze. Math. Ann. 20. k.

[3] $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ $k$-adrendű szummája alatt a $\lim\limits_{n=\infty} S_n^{(k)} = A$ határértéket értjük, hol — HÖLDER szerint — $S_n^{(k)}$ a következő rekurziv képletsorozattal van értelmezve:

$$S_n^{(k)} = (S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)}) \frac{1}{n+1}, \qquad (k=1, 2, \ldots)$$
$$S_n^{(0)} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

[4] CESARO: Sur la multiplication des séries. Bulletin des Sciences Math. 14. k. (1890.)

$(k+1)$-ed, $(k+2)$-ed, ... rendű arithmetikai összegek is léteznek és $A$-val egyenlők. Ebből következik, hogy a $k$-adrendű arithmetikai összeg létezése esetében:

$$\lim (S_n^{(k+1)} - S_n^{(k)}) = 0. \tag{4}$$

A (3) és (4) alatti relácziók tehát szükséges feltételét adják annak, hogy az (1) sor a $k$-adrendű arithmetikai közepekkel összegezhető legyen.

Dolgozatunk czéljául annak kimutatását tekintjük, hogy e feltételek egyben elegendők is arra, hogy a (2) hatványsor az $x=1$ helyen $k$-adrendű arithmetikai közepekkel összegezhető legyen. A föntebb mondottakat összekapcsolván azzal, a minek bebizonyitását most czélunkul kitűztük, a következő tételre jutunk:

I. *Arra, hogy a* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *sor az* $x=1$ *helyen a* $k$*-adrendű arithmetikai közepek módszerével összegezhető legyen, szükséges és elegendő, hogy a*

$$\lim_{\varrho=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$$

*és*

$$\lim (S_n^{(k+1)} - S_n^{(k)})$$

*határértékek egyidejűleg létezzenek és ez utóbbi értéke* 0 *legyen.*

Ha valamely sornak közönséges értelemben vett összegét 0-adrendű szummájának tekintjük, akkor most kimondott tételünket Tauber [1] következő tétele általánositásának tekinthetjük:

II. *A* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *végtelen sor akkor és csakis akkor konvergens, ha* $\lim\limits_{\varrho=1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ *létezik és* $\lim\limits_{n=0} \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k = 0$.

A (3) és (4) alatti feltételek elegendő voltát bizonyitandó, a teljes indukczió módszeréhez folyamodunk.

1°. Tegyük fel, hogy (I) tételünk $k$-ra igaz, azaz valamely végtelen sor $k$-adrendűleg szummabilis, ha a részletösszegek

[1] Tauber: Ein Satz aus der Theorie der Unendlichen Reihen. Monatshefte für Math. und Phys. 1897.

$k$-ad és $(k+1)$-edrendű arithmetikai közepei különbségének határértéke 0 és a megfelelő hatványsor által definiált függvény az $x=1$ helyen balról folytonos.

2°. Tegyük fel továbbá, hogy

$$\lim_{\rho=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = A$$

létezik és

$$\lim (S_n^{(k+2)} - S_n^{(k+1)}) = 0.$$

E feltevések alapján be akarjuk bizonyítani, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor $(k+1)$-edrendű számtani közepekkel szummázható, azaz

$$\lim S_n^{(k+1)}$$

létezik. (Ha e határérték létezik, Hölder tétele szerint $A$-val egyenlő.) $\lim S_n^{(k+1)}$ létezik, ha $S_n^{(1)}$ $k$-ik arithmetikai közepének van határértéke. Ez utóbbi határérték létezésére 1°. alapján bizton következtethetünk, ha $S_n^{(1)}$ $k$-ad és $(k+1)$-edrendű számtani közepei különbségének 0 a határértéke, azaz

$$\lim (S_n^{(k+2)} - S_n^{(k+1)}) = 0,$$

ha továbbá még a:

$$\lim_{\rho=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (S_{n+1}^{(1)} - S_n^{(1)}) \rho^n$$

határérték létezik.

E feltételek közűl az első a 2°. alatti feltevések értelmében teljesítve van. Hogy a második feltétel teljesülését megmutathassuk, a következő segédtételre[1] hivatkozunk.

Ha valamely $f(x) = \sum\limits_{n=\infty}^{\infty} c_n x^n$ alakú hatványsor együtthatói a $\lim\limits_{n=\infty} c_n = 0$ feltételnek megfelelnek, akkor:

[1] E segédtétel Cesaro következő tételével bizonyítható: Ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergens sugara $=1$, ha továbbá $a_n > 0$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergens és $\lim \dfrac{b_n}{a_n} = k$, akkor

$$\lim_{x=1-0} \frac{\sum b_n x^n}{\sum a_n x^n} = \lim \frac{b_n}{a_n} = k.$$

$$\lim_{x=1-0} x(x-1)f'(x) = 0,$$

$$\lim_{x=1-0} x(x-1)\frac{d}{dx}[x(x-1)f'(x)] = 0,$$

$$\lim_{x=1-0} x(x-1)\frac{d}{dx}\left\{x(x-1)\frac{d}{dx}[x(x-1)f'(x)]\right\} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

relácziók mindannyian teljesülnek.

Alkalmazzák e segédtételt az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(S_n^{(k+2)} - S_n^{(k+1)})\, x^{n+1}$$

hatványsorra, a következő összefüggésekre jutunk:

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty}(S_n^{(k+1)} - S_n^{(k)})\, x^{n+1} = 0,$$

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty}(S_n^{(k)} - S_n^{(k-1)})\, x^{n+1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty}(S_n^{(1)} - S_n^{(0)})\, x^{n+1} = 0. \qquad (5)$$

Vegyük most tekintetbe, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(S_{n+1}^{(1)} - S_n^{(1)})\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(S_{n+1}^{(1)} - S_{n+1}^{(0)})\, x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(S_n^{(1)} - S_n^{(0)})\, x^n +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty}(S_{n+1}^{(0)} - S_n^{(0)})\, x^n$$

és hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(S_{n+1}^{(0)} - S_n^{(0)})\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;$$

de 2°. feltevés szerint

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = A,$$

és (5) szerint

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty}(S_{n+1}^{(1)} - S_{n+1}^{(0)}) = \lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty}(S_n^{(1)} - S_n^{(0)})\, x^n = 0,$$

tehát

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (S_{n+1}^{(1)} - S_n^{(1)}) x^n = A.$$

Ime, a 1°. és 2°. feltevésekből tényleg következik $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $(k+1)$-edrendű összegezhetősége s így a $k$-ra igaznak feltételezett theoremánk $(k+1)$-re is igaz. De $k=0$-ra TAUBER tétele szerint igaz, tehát igaz minden $k$-ra.

*Fekete Mihály.*

# PLANIMETRIAI ELJÁRÁS

## CSILLAPÍTOTT MŰSZEREK MOZGÁSI EGYENLETÉNEK MEGÁLLAPÍTÁSÁRA, VALAMINT A MOZGÓ RÉSZ SÚLYÁNAK ÉS A FÉKEZŐ ERŐNEK KISÉRLETI ÚTON VALÓ MEGHATÁROZÁSÁRA.

A mint tudjuk, egy $G$ redukált súlyú, pro egységnyi kiütés $C$ visszatérítő erő és pro egységnyi sebesség $R$ fékező erő hatása alatt álló tömeg általános mozgási egyenletét a következő másodrendű lineár differencziálegyenlet adja:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{G}{g}R\frac{dx}{dt}+\frac{G}{g}Cx=0. \tag{1}$$

Ilyen mozgást végez egy spirálrúgóra fölfüggesztett tömeg, ha valamilyen például folyadékcsillapítással van ellátva.

Ilyennek vehetjük föl a földrengésjelzők ingáinak természetes mozgását is, mivel itt az amplitudók még oly kicsinyek, hogy az ingasúly mozgását bátran egyenesnek vehetjük föl.

A földrengések kutatóinak a diagrammok vizsgálatánál és pontosabb elemzésénél szükségük van az inga redukált tömegének ($G$) és a fékező erő nagyságának ($R$) ismeretére.

Ha a csillapitás nem túlságos erős, úgy hogy a műszer még periodikus és nem túlgyorsan csillapodó mozgást végez, elég egyszerűen állapitható meg a $G$ és $R$ a lengésidő és a logarithmikus dekrementum meghatározásával.

Mindjárt cserben hagy azonban ez a módszer, mihelyt a csillapitás oly erős, hogy az inga egyáltalán nem végez periodikus mozgást, azaz aperiodikus, vagy ha még végez is periodikus mozgást ugyan, de alig egy-két amplitudó után megáll. Az első esetben egyáltalán használhatatlan az előbb említett módszer, a másik esetben pedig igen pontatlan eredményeket ad.

Már pedig, ha egyelőre a földrengésjelzők mellett maradunk, a mint B. Galitzin több értekezésében kimutatta, igen czélszerű a földrengésjelzők ingáit erős csillapítással ellátni, olyannyira, hogy a műszer már ne végezzen periodikus lengéseket, de azért a fékezés se legyen az épen erre a czélra szükségesnél nagyobb, vagyis egyszóval czélszerű az ingákat az *aperiodikusság határára* beállítani.

Erre ő, az általa alkalmazott elektromágneses regisztrálást tartva szem előtt, igen szép és elég egyszerű módszert dolgozott ki, a melyből az aperiodikusság határa egy kissé ugyan körülményes, de elég éles eredményeket adó számítás után meghatározható.

Nem alkalmazhatjuk azonban ezt a módszert a mechanikai vagy photographiai regisztrálásnál, úgy hogy azt hiszem, nem végezek fölösleges munkát, ha az alább kifejtett módszeremet ismertetem. Ennek előnye, hogy bármilyen regisztrálásnál használható és csak a regisztrálás sebességének ismeretét tételezi föl, a mire úgyis szükség van a földrengésjelzőknél.

Jó szolgálatot tesz ez a módszer más műszereknél is, például e sorok írója az egész módszert ép egy meteorológiai műszer, a Dynes-féle szélregisztráló mathematikai vizsgálatára dolgozta ki.

A módszer csak azt kivánja, hogy a műszernek ú. n. *csillapodási görbéjét* fölvehessük, vagyis azon görbét, a melyet kapunk, ha a kitérített műszer kiütéseit ordinátáknak, az időt pedig abscissáknak veszszük föl a koordinátarendszerben. (Ilyen csillapodási görbék láthatók a mellékelt ábrákon.)

Bármely műszernél is igen egyszerűen minden nagyobb előkészület nélkül megkapjuk a csillapodási görbét, ha a műszer mozgó részére egy kis tükröt ragasztunk és a visszavert fénysugarat egy photographlemezre vetjük, a melyet a mozgó fénysugár előtt szabadkézzel egyenletesen elhúzunk. Egy kis gyakorlat és némi próbálgatás után ismeretes és elég egyenletes sebességgel tudjuk ezt a mozgást elvégezni, úgy hogy a görbe egész szép egyenletes lesz.

A numerikus számításoknál használt és az ábrákon látható csillapodási görbék is így vétettek fel.

Ezen rövid kitérés után térjünk vissza az (1) egyenletünkre.

A mint tudjuk, ennek általános megoldása:

$$x = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t},$$

a hová $\alpha$ és $\beta$ át a segédegyenlet megoldásából kapjuk:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{gR}{2G} \pm \sqrt{\left(\frac{gR}{2G}\right)^2 - \frac{Cg}{G}}. \qquad (2a)$$

Tudjuk azt, ha a négyzetgyökjel alatti kifejezés *(a discriminans)* negativ: a mozgás periodikus, ha a discriminans pozitiv: a mozgás aperiodikus, ha a discriminans nulla: ép az aperiodikusság határán vagyunk.

I. Foglalkozzunk egyelőre az aperiodikus mozgással, mert ennek a tárgyalása adódik ki a módszerből legközvetlenebbül. (Majd ha ezt egészen ismerjük, akkor áttérhetünk a periodikus mozgásra és végre kitérhetünk egy pár szóval az aperiodikusság határára is.)

Az aperiodikusság esetében a discriminans pozitiv:

$$\left(\frac{gR}{2G}\right)^2 > \frac{Cg}{G}$$

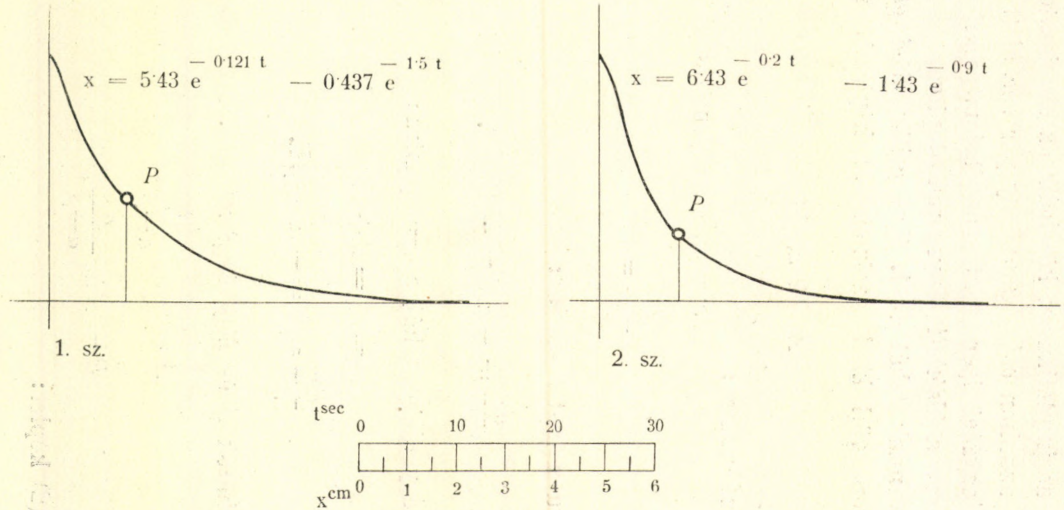
az $\alpha$ és $\beta$ reális értékek, vagyis az

$$x = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} \qquad (2)$$

görbe tényleg exponencziális, nemcsak a formája az.

Feladatul tűztük ki magunk elé ezen (2) képlet állandóinak meghatározását.

Erre a czélra fölveszszük a műszer csillapodási görbéjét (lásd 1. ábrát) oly módon, hogy kitérítjük $x_1$ darabbal és aztán



$x = 5{\cdot}43\, e^{-0{\cdot}121\, t} - 0{\cdot}437\, e^{-1{\cdot}5\, t}$
P
1. sz.
$x = 6{\cdot}43\, e^{-0{\cdot}2\, t} - 1{\cdot}43\, e^{-0{\cdot}9\, t}$
P
2. sz.
$t^{sec}$ 0 10 20 30
$x^{cm}$ 0 1 2 3 4 5 6


**1. ábra.**

magára hagyjuk, mire leírja (akár mint a földrengésjelzőknél mechanikus regisztrálással, akár a fönt említett photographiai regisztrálással) az ábrán látható görbét. Ez a görbe az elmélet szerint csak assimptotikusan közeledik az abscissatengelyhez, a valóságban azonban *elég hamar* egy pár sec. alatt eléri azt. Ezt a megjegyzést igen fontosnak tartom, mert az egész módszer ép erre a kisérleti tényre van alapitva.

Előttünk vannak tehát az 1. ábra csillapodási görbéi, föladatunk: ezen görbékből azoknak (2) képleteit fölállítani, vagyis az

$$A, B, \alpha, \beta\text{-t}$$

meghatározni.

A $t=0$ kezdőpontra:

$$x = x_1 \qquad \text{(lemérhető)}$$

és a sebesség

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Differencziálva a (2)-t $t$ szerint:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha A e^{-\alpha t} - \beta B e^{\beta t}. \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletek tehát a $t=0$ pontra:

$$x = x_1 = A+B,$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 = -\alpha A - \beta B.$$

Ebből kifejezhetők $A$ és $B$ $\alpha$ és $\beta$-val

$$A = -x_1 \frac{\beta}{\alpha-\beta},$$

$$B = x_1 \frac{\alpha}{\alpha-\beta},$$

úgy hogy a (2) képlet:

$$x = x_1 \frac{\alpha}{\alpha-\beta} e^{-\beta t} - x_1 \frac{\beta}{\alpha-\beta} e^{-\alpha t}. \tag{2b}$$

Van tehát, ha az $x$-et és $t$-t ismert értékeknek fogadjuk el (az 1. ábrán a $P$ pont) egy egyenletünk két ismeretlennel $\alpha$, $\beta$-val.

Ez egymagában nem elegendő az $\alpha$, $\beta$ meghatározására, egy másik hasonló egyenletnek fölírása egy új $P_1$ pontra sem segít, mivel az így létrejövő két ismeretlennel ellátott transcendens egyenletpár gyakorlatilag megoldhatatlan.

Ha emlékezetünkbe hozzuk az előbbi megjegyzést, hogy *a* (2) *exponencziális görbe* nem végtelen idő mulva, hanem *elég rövid idő mulva már záródik,* akkor *a csillapodási görbe területének* bevezetésével és meghatározásával elég egyszerű képlethez jutunk az $\alpha$ és $\beta$ egymáshoz való viszonyának megállapítására.

A görbe területe:

$$F=\int_0^\infty x dt$$

$x$-et ($2a$)-ból helyettesítve:

$$F=x_1\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\int_0^\infty e^{-\beta t}dt-x_1\frac{\beta}{\alpha-\beta}\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt,$$

de

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}dt=\frac{1}{\beta},$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\alpha},$$

úgy hogy:

$$F=\frac{x_1}{\beta}\frac{\alpha}{\alpha-\beta}-\frac{x_1}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

és ebből:

$$\frac{F}{x_1}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \tag{4}$$

végre

$$\beta=\frac{x_1\alpha}{F\alpha-x_1}.$$

Ha ezt a ($2a$)-be helyettesítjük és az

$$x_1\frac{F\alpha-x_1}{F\alpha-2x_1}=m,$$

$$\frac{x_1^2}{Fa-2x_1}=n,$$

$$\frac{x_1}{Fa-x_1}=p,$$

rövidítéseket elfogadjuk, akkor a következő alakhoz jutunk:

$$x=me^{-pat}-ne^{-at}. \qquad (5)$$

Ebben már, ha a $t$ és $x$ a $P$ pont koordinátái, s mint ilyenek ismeretesek, csak az $a$ ismeretlen van.

Ámde még ennek daczára sem oldható meg direkt módszerrel, csakis *próbálgatással* a *regula falsi* szerint.

Hogy kevesebbet kelljen próbálgatni, czélszerű megállapitani, hogy az $x$ változása milyen változást okoz az $a$ értékében. Ezzel eszköz lenne a kezünkben, hogy legalább az első találomra való fölvétel után rendes számítási alapon továbbdolgozhassunk.

Ekkor ugyanis, ha a választott $a$ értékkel az (5) képlet $x'$-t ad, a mely

$$x' \gtrless x,$$

akkor az

$$x-x'=dx$$

értéket a

$$da=f(dx)$$

egyenletbe helyettesitve, megkapjuk a $da$ javítást.

Ezen eljárást persze mindaddig kell folytatnunk, a míg kellő megközelítést nem kaptunk, a míg a gyakorlatban

$$x'=x$$

nem lesz.

A $da=f(dx)$ képlet fölállitása legegyszerűbben történik, ha az (5) egyenletet $a$ szerint differencziáljuk:

$$\frac{dx}{da}=\frac{d}{da}\left(x_1\frac{Fa-x_1}{Fa-2x_1}\right)e^{-\frac{x_1at}{Fa-x_1}}+$$

$$+x_1\frac{Fa-x_1}{Fa-2x_1}\,\frac{d}{da}\left(e^{-\frac{x_1at}{Fa-x_1}}\right)-$$

$$-\frac{d}{da}\left(\frac{x_1^2}{Fa-2x_1}\right)e^{-at}-\frac{x_1^2}{Fa-2x_1}\,\frac{d}{da}\left(e^{-at}\right).$$

A differencziálás elvégzése és némi összevonás után:

$$\frac{dx}{da} = r\,(e^{-at} - e^{-pat}) + s\,(e^{-at} + pe^{-pat}), \tag{6}$$

a hol

$$\frac{Fx_1^2}{(Fa-2x_1)^2} = r,$$

$$\frac{x_1^2 t}{Fa-2x_1} = s.$$

És ha még fölveszszük az:

$$r\,(e^{-at} - e^{-pat}) + s\,(e^{-at} + pe^{-pat}) = v$$

jelölést is, akkor végre:

$$da = \frac{dx}{v}\cdot \tag{6a}$$

Ha pedig az $a$-t ily módon az (5) és (6) képletekből megkaptuk, akkor a $\beta$-t a

$$\beta = pa \tag{7}$$

képlet adja.

Czélunkat tehát elértük, a mennyiben a (2) képletben ismerjük mind a négy:

$$A,\quad B$$
$$a,\quad \beta$$

állandókat.

A mint az értekezés czíme mutatja, mi nemcsak ezen (2) képlet állandóit akarjuk ismerni, vagy jobban mondva, nem annyira ennek állandóit keressük, hanem inkább az (1) egyenletben előforduló

$G$ . . . redukált súly,

$R$ . . . fékező erő

állandókat.

Az előbbiek alapján ismerjük a műszer mozgási egyenletéhez tartozó

$a,\ \beta$ értékeket.

(2$a$)-ból kapjuk:

$$a = \frac{gR}{2G} + \sqrt{\left(\frac{gR}{2G}\right)^2 - \frac{Cg}{G}},$$

$$\beta = \frac{gR}{2G} - \sqrt{\left(\frac{gR}{2G}\right)^2 - \frac{Cg}{G}},$$

a kettőt összeadva lesz:

$$\alpha + \beta = \frac{gR}{G}. \tag{8}$$

Ezen (8) képletben ismeretes $\alpha$, $\beta$, $g$ és ismeretlenek $R$ és $G$. Szükségünk volna még egy egyenletre, hogy ezen értékeket szétválaszthassuk.

E végből a műszer mozgó részét megterheljük $G_2$ súlylyal, úgy hogy most az általános mozgási egyenlete lesz

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{G+G_2} R \frac{dx}{dt} + \frac{g}{G+G_2} C_2 x = 0.$$

Ennek a megoldása megint csak az

$$x = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t}$$

alakot kapja, a hol:

$$\left.\begin{matrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{matrix}\right\} = \frac{gR}{2(G+G_2)} \pm \sqrt{\left[\frac{gR}{2(G+G_2)}\right]^2 - \frac{C_2 g}{G+G_2}}.$$

Az $\alpha_2\beta_2$ ép úgy határozható meg most is a $G_2$ terheléshez tartozó csillapitási görbéből mint az előbb az $\alpha$ és $\beta$.

Úgy, hogy ismerve $\alpha_2\beta_2$-őt, ezen megterhelés esetére fölírhatjuk az:

$$\alpha_2 + \beta_2 = \frac{gR}{G+G_2} \tag{8a}$$

képletet.

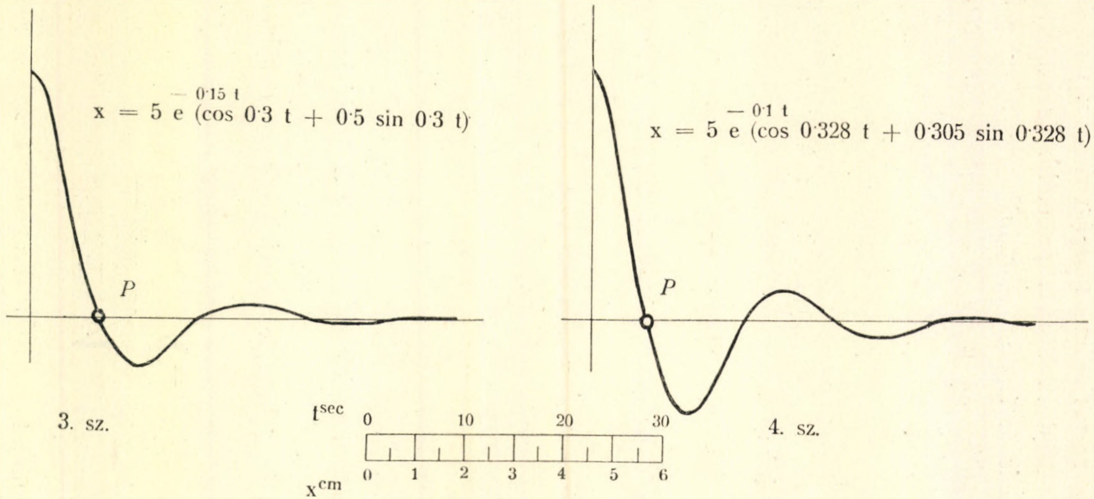
A (8)-at elosztva a (8$a$)-val:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha_2+\beta_2} = \frac{G+G_2}{G}$$

és végre ebből:

$$G = \frac{G_2}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha_2+\beta_2} - 1} \tag{9}$$

s ha már $G$ ismeretes:


x = 5 e^{− 0·15 t} (cos 0·3 t + 0·5 sin 0·3 t)
x = 5 e^{− 0·1 t} (cos 0·328 t + 0·305 sin 0·328 t)
P
P
3. sz.
4. sz.
t^sec
0 10 20 30
x^cm
0 1 2 3 4 5 6

**2. ábra.**

$$R = (\alpha + \beta)\frac{G}{g}\cdot \tag{9a}$$

II. Ha a műszer periodikus mozgást végez ugyan, de erősen van csillapítva (lásd 2. ábrát), az előbb levezetett képletek ugyan ez esetre is érvényben maradnak, de mivel a discrimináns most negativ, az $\alpha$ és $\beta$ *konjugált komplex számok* vagyis az

$$\alpha = a + bi$$
$$\beta = a - bi$$

alakot veszik föl.

Behelyettesítve a ($2a$) egyenletbe ezeket az alakokat és összevonva, kapjuk:

$$x = x_1 e^{-at}\left(\cos bt + \frac{a}{b}\sin bt\right). \tag{10}$$

És ha ismét az $F$ területet keressük:

$$F = \int_0^\infty x dt = x_1 \int_0^\infty e^{-at}\cos bt dt + x_1 \frac{a}{b}\int_0^\infty e^{-at}\sin bt dt$$

és ebből:

$$F = \frac{2ax_1}{a^2+b^2}\cdot \tag{11}$$

(A terület meghatározásánál vigyázni kell arra, hogy az abscissa tengely alá eső területek levonassanak a többiekből, és teljesen magától értetődik, hogy ugyanez eredményre jutottunk volna, ha az $\alpha$ és $\beta$ komplex alakjait a (4)-be behelyettesítjük.)

Ebből

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{2ax_1 - Fa^2}{F}}, \\ \frac{a}{b} &= \sqrt{\frac{a^2F}{2ax_1 - Fa^2}}. \end{aligned} \tag{10a}$$

A (10) egyenletet a ($10a$) segélyével ismét a regula falsi szerint oldhatjuk meg próbálgatás után.

A (10) egyenlet differencziálásából $a$ szerint ismét kapunk összefüggést a $dx$ és $da$ között:

$$\frac{dx}{da} = x_1 e^{-at}(m \cos bt + n \sin bt),$$

a hol:

$$\left.\begin{aligned} m &= t\left(\frac{a}{b}\,\frac{x_1 - aF}{bF} - 1\right) \\ n &= \frac{1}{b}\left(1 - \frac{a}{b}\,\frac{x_1 - aF}{bF}\right) - t\left(\frac{a}{b} + \frac{x_1 - aF}{bF}\right) \end{aligned}\right\} \quad (11b)$$

és ha

$$x_1 e^{-at}(m \cos bt + n \sin bt) = v, \quad (11a)$$

akkor

$$da = \frac{dx}{v}\cdot \quad (11)$$

Ha már most van egy ilyen periodikus csillapodási görbepárom (az egyik terhelés nélkül, a másik terheléssel fölvéve), akkor a $G$ és $R$ kiszámítása teljesen a (9) és (9$a$) képlet szerint történik, csak az

$$\alpha = a + bi,$$
$$\beta = a - bi,$$

helyettesítéseket kell elvégezni, a mikor is

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{G_2}{\frac{a}{a_2} - 1}, \\ R &= 2a\,\frac{G}{g}, \end{aligned}\right\} \quad (9b)$$

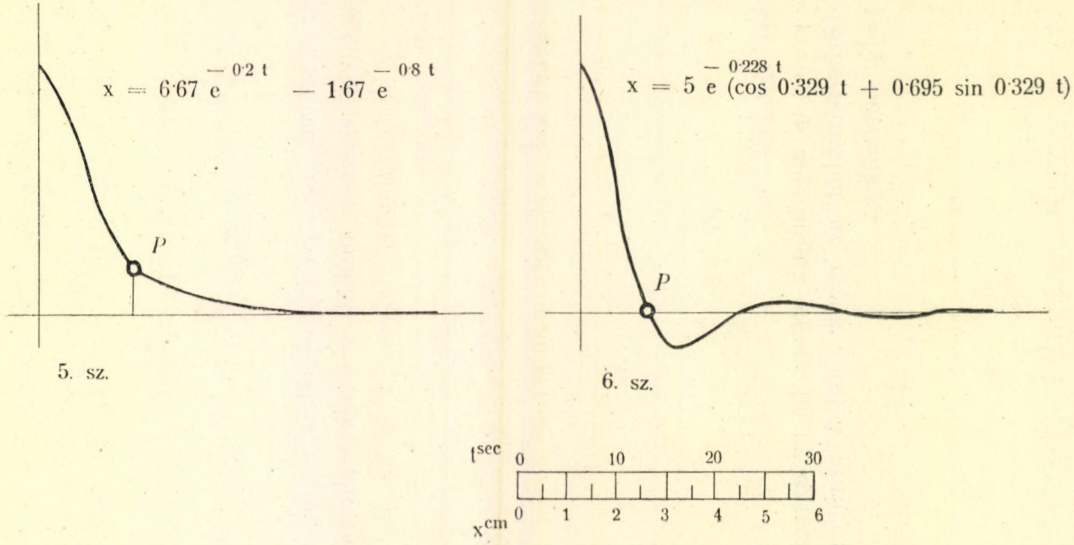
egyenleteket nyerjük.

Azt az esetet is meg tudjuk oldani, ha az összetartozó csillapodási görbe-párokból az egyik (lásd 3. ábrát) aperiodikus, a másik pedig periodikus.

Akkor

$$\left.\begin{aligned} G &= \frac{G_2}{\frac{\alpha+\beta}{2a_2} - 1}, \\ R &= (\alpha+\beta)\,\frac{G}{g}\cdot \end{aligned}\right\} \quad (9c)$$

III. Egy pár szóval meg kell még emlékeznünk az *aperiodikusság határán* lévő esetről is.


$x = 6{\cdot}67\, e^{-0{\cdot}2\, t} - 1{\cdot}67\, e^{-0{\cdot}8\, t}$
P
5. sz.
$x = 5\, e^{-0{\cdot}228\, t} (\cos 0{\cdot}329\, t + 0{\cdot}695 \sin 0{\cdot}329\, t)$
P
6. sz.
$t^{sec}$
0 10 20 30
$x^{cm}$
0 1 2 3 4 5 6

**3. ábra.**

Világos, hogy mivel az aperiodikusság határán a discriminans nulla

$$\alpha = \beta.$$

Vagyis, ha egy elemzett aperiodikus görbénél azt találjuk, hogy az $\alpha$ és $\beta$ értékek közt nincs nagy különbség, bátran azt mondhatjuk, hogy a műszerrel túlléptük ugyan már az aperiodikusság határát, de mindenesetre csak igen kevéssé.

Ha valamely műszernél (pl. földrengésjelző) szigorúan ragaszkodunk ahhoz, hogy a műszer saját mozgása pontosan az aperiodikusság határára legyen beállítva, a következőképen járhatunk el:

A csillapítást először úgy állítjuk be, hogy a csillapodási görbe periodikus legyen.

Most fokozatosan növeljük a csillapítást, míg végre aperiodikus görbét nem nyertünk.

Kérdés azonban, hogy ez az aperiodikusság határának felel-e meg, túlléptük-e már, vagy még innen vagyunk rajta. (Az ilyen finomságig menő beállítást a görbe alakjából nem igen tudhatjuk meg.)

E végből írjuk föl az aperiodikusság határának megfelelő képletet:

$$x = (A + Bt)\, e^{-\alpha t}.$$

Az állandók meghatározására:

$$\frac{dx}{dt} = Be^{-\alpha t} - (A + Bt)\, \alpha e^{-\alpha t}$$

és a $t = 0$ helyen:

$$x = x_1 = A,$$

$$\frac{dx}{dt} = 0 = B - A\alpha,$$

és ezekből

$$A = x_1,$$

$$B = x_1 \alpha,$$

úgy hogy

$$x = x_1 (1 + \alpha)\, e^{-\alpha t}. \tag{12}$$

A görbe területe pedig:

$$F = \int_0^\infty x dt = x_1 \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt + x_1 \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} dt$$

és az integrálás elvégzése után:

$$F = \frac{2x_1}{\alpha}.$$

(Ugyanezt kaptuk volna, ha a (4)-be $\beta = \alpha$-t helyettesítünk.)

A mint látjuk, itt a terület meghatározása képessé tett minket az egyenlet azonnal való megoldására:

$$\alpha = \frac{2x_1}{F}. \tag{13}$$

Ha tehát az előbb leirt módon nyertünk egy görbét, a melyről tudjuk azt, hogy mindenesetre *közel* van az aperiodikusság határához, de tudni akarjuk, vajjon még innen van-e rajta vagy már túllépte, akkor a görbe területéből kiszámitjuk a (13) alapján $\alpha$-t és megpróbáljuk, hogy az így nyert (12) egyenlet megfelel-e a görbének.

Ha egy fölvett $t$ időpontra a (12)-ből $x'$-t kapunk, holott a görbén $x$ van, akkor:

ha $x' < x$-nél, akkor még nem értük el az aperiodikusság határát;

ha $x' > x$ nél, akkor már túlléptük az aperiodikusság határát.

Az első esetben a csillapitást kissé még növelnünk kell, a másodikban gyengitenünk. Ha már most a $G$ és $R$ kiszámitására fölvett csillapodási görbepárból az egyik aperiodikus volna, a másik az aperiodikusság határán, akkor a (9) és (9$a$) képletek átalakulnak:

$$G = \frac{G_2}{\frac{\alpha+\beta}{2\alpha_2} - 1}, \tag{9d}$$

$$R = (\alpha+\beta)\frac{G}{g}.$$

Az aperiodikusság határán lévő és periodikus görbéknél pedig:

$$G = \frac{G_2}{\frac{a}{\alpha} - 1},$$
$$R = 2\alpha \frac{G}{g}. \tag{9e}$$

Lássunk mindezen eljárásokra számpéldákat. Mivel változtatható csillapítással ellátott földrengésjelző inga nem állott rendelkezésemre, egy kis olajcsillapítással ellátott ingát improvizáltam.

A csillapodási görbéket fotografiai úton regisztráltam oly módon, a mint azt értekezésem kezdetén leírtam.

Az *1. ábrán* látható két összetartozó aperiodikus csillapodási görbe. Az 1. számú görbe terhelés nélkül, a 2. számú $G_2 = 200$ gr. terheléssel vétetett föl.

A *2. ábrán* periodikus csillapodási görbepár van. A 3. számú görbe terhelés nélkül, a 4. számú $G_2 = 200$ gr. terheléssel fölvéve.

A *3. ábrán* az 5. számú aperiodikus görbe terhelés nélkül, a 6. számú periodikus görbe $G_2 = 500$ gr. terheléssel van regisztrálva.

A görbék egyenleteinek megállapítására fölhasználtuk a planiméterrel meghatározott területeket (periodikus görbéknél az abscissatengely alatt lévő terület levonódik!) és a görbéken megjelölt $P$ pontok koordinátáit. Planiméter hiányában igen alkalmasnak bizonyult a mérlegelési eljárás, a mely szerint a területet kivágjuk lehetőleg egyenletes papirból és a súlyából következtetünk a nagyságára. Ez esetben a görbének az abscissatengely alá eső részeit a másik mérlegcsészébe kell tenni!

Az *1. tabella* adja az aperiodikus görbék számítását és a számításhoz való képleteket könnyen áttekinthető alakban, a *2. tabella* pedig a periodikus görbékét.

Az így meghatározott egyenletek az ábrákon a görbék fölé vannak írva.

A mi már most a $G$ és $R$ számítását illeti (minden *C. G. S.* egységben):

*a)* Az 1. ábra görbéire (9)-ből:

$$G = \frac{200}{\frac{1{\cdot}5+0{\cdot}121}{0{\cdot}9+0{\cdot}2}-1} = 420 \text{ gr.},$$

$$R = (1{\cdot}5+0{\cdot}121)\,\frac{420}{981} = 0{\cdot}696 \text{ gr. pro cm. sebesség.}$$

*b)* A 2. ábra görbéire (9*b*)-ből:

$$G = \frac{200}{\frac{0{\cdot}15}{0{\cdot}10}-1} = 400 \text{ gr.},$$

$$R = 2.0{\cdot}15 \cdot \frac{400}{981} = 0{\cdot}122 \text{ gr. pro cm. sebesség.}$$

*c)* A 3. ábra görbéire (9*c*)-ből:

$$G = \frac{500}{\frac{0{\cdot}8+0{\cdot}2}{2.0{\cdot}228}-1} = 420 \text{ gr.},$$

$$R = (0{\cdot}8+0{\cdot}2)\,\frac{420}{981} = 0{\cdot}428 \text{ gr. pro cm. sebesség.}$$

*Büky Aurél.*

| Görbe száma | Terhelés | A görbékből ismeretesek | | | | Kiszámítjuk | | Felveszszük | Az 5. és 6. képletek megoldásához szükséges értékek | | | | | | | | | | Az 5. és 6a)-ból kapjuk | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $G_2^{gr}$ | $x_1^{cm}$ | $F^{cm\ sec}$ | $x^{cm}$ | $t^{sec}$ | $2x_1$ | $x_1^2$ | $\alpha^{sec^{-1}}$ | $\alpha t$ | $\alpha F$ | $\alpha F-x_1$ | $\alpha F-2x_1$ | $m$ | $n$ | $p$ | $r$ | $s$ | $v$ | $x'$ | $\Delta x$ | $\Delta\alpha$ |
| | | 5·0 | 44·7 | 2·06 | 8·0 | 10·0 | 25·0 | 1·2 | 9·6 | 53·7 | 48·7 | 43·7 | 5·57 | 0·514 | 0·1026 | 0·585 | 4·58 | −0·043 | 2·08 | −0·02 | 0·4 |
| 1. | 0 | | $\alpha = 1·5\ sec^{-1}$ | | | | | 1·6 | 12·8 | 71·6 | 66·6 | 61·6 | 5·40 | 0·406 | 0·075 | | | | 2·056 | 0·004 | −0·1 |
| | | | $\beta = 0·121$ « | | | | | 1·5 | 12·0 | 67·0 | 62·0 | 57·0 | 5·43 | 0·437 | 0·0807 | | | | 2·06 | — | — |
| | | 5·0 | 30·5 | 1·32 | 8·0 | 10·0 | 25·0 | 1·0 | 8.0 | 30·5 | 25·5 | 20·5 | 6·22 | 1·22 | 0·196 | 1·818 | 9·75 | 0·017 | 1·328 | −0·002 | −0·1 |
| 2. | 200 | | $\alpha = 0·9\ sec^{-1}$ | | | | | 0·9 | 7·2 | 27·4 | 22·4 | 17·4 | 6·43 | 1·43 | 0·223 | | | | 1·32 | — | — |
| | | | $\beta = 0·2$ « | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 5·0 | 31·2 | 0·9 | 10·0 | 10·0 | 25·0 | 0·6 | 6·0 | 18·7 | 13·7 | 8·7 | 7·89 | 2·88 | 0·365 | 10·3 | 28·8 | 0·12 | 0·882 | 0·018 | 0·15 |
| 5. | 0 | | $\alpha = 0·8\ sec^{-1}$ | | | | | 0·8 | 8·0 | 25·0 | 20·0 | 15·0 | 6·67 | 1·67 | 0·25 | | | | 0·9 | — | — |
| | | | $\beta = 0·2$ « | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

$$m = x_1 \frac{\alpha F - x_1}{\alpha F - 2x_1}; \quad n = \frac{x_1^2}{\alpha F - 2x_1}; \quad p = \frac{x_1}{\alpha F - x_1}; \quad r = \frac{F x_1^2}{(\alpha F - 2x_1)^2}; \quad s = \frac{x_1^2 t}{\alpha F - 2x_1},$$

$$v = r\,(e^{-\alpha t} - e^{-p\alpha t}) + s\,(e^{-\alpha t} + p e^{-p\alpha t}),$$

$$x' = m e^{-p\alpha t} - n e^{-\alpha t},$$

$$\Delta x = x - x',$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{v},$$

$$\beta = p\alpha.$$

| Görbe száma | Terhelés | A görbékből ismeretesek | | | | Felveszszük | A 10. és 11. képletek kiszámitásához szükséges értékek | | | | | | | | | | A 10. és 11-ből kapjuk | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $G_2^{gr}$ | $x_1^{cm}$ | $F^{cm\ sec}$ | $x^{cm}$ | $t^{sec}$ | $a^{sec^{-1}}$ | $ax_1$ | $2ax_1$ | $aF$ | $a^2F$ | $b$ | $\frac{a}{b}$ | $bF$ | $m$ | $n$ | $v$ | $x'$ | $\Delta x$ | $\Delta a$ |
| | | 5 | 13·3 | 0 | 6·8 | 0·12 | 0·60 | 1·2 | 1·6 | 0·192 | 0·274 | 0·438 | 5·65 | —3·95 | —4·19 | —8·6 | 0·305 | —0·305 | 0·03 |
| 3. | 0 | $a = 0{\cdot}15$ | | | | 0·15 | 0·75 | 1·5 | 1·995 | 0·299 | 0·3 | 0·5 | 3·99 | | | | 0 | — | — |
| | | $b = 0{\cdot}3$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 5 | 8·48 | 0 | 5·66 | 0·12 | 0·60 | 1·2 | 1·018 | 0·1222 | 0·347 | 0·346 | 2·94 | —2·95 | —8·118 | —6·35 | —0·162 | 0·162 | 0·02 |
| 4. | 200 | | $a = 0{\cdot}1$ | | | 0·1 | 0·5 | 1·0 | 0·848 | 0·085 | 0·328 | 0·305 | 2·79 | | | | 0 | — | — |
| | | | $b = 0{\cdot}328$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | 5 | 14·24 | 0 | 6·62 | 0·2 | 1·0 | 2·0 | 2·848 | 0·57 | 0·3165 | 0·632 | 4·51 | —4·62 | —5·13 | —2·83 | 0·0625 | —0·0625 | 0·028 |
| 6. | 500 | | $a = 0{\cdot}228$ | | | 0·228 | 1·14 | 2·28 | 3·25 | 0·742 | 0·329 | 0·695 | 4·69 | | | | — | — | — |
| | | | $b = 0{\cdot}329$ | | | | | | | | | | | | | | | | |

$$b = \sqrt{\frac{2ax_1 - a^2F}{F}}; \quad m = t\left(\frac{a}{b}\,\frac{x_1 - aF}{bF} - 1\right); \quad n = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{a}{b}\,\frac{x_1 - aF}{F}\right) - t\left(\frac{a}{b} + \frac{x_1 - aF}{bF}\right),$$

$$v = x_1 e^{-at}(m \cos bt + n \sin bt),$$

$$x' = x_1 e^{-at}\left(\cos bt + \frac{a}{b}\sin bt\right),$$

$$\Delta x = x - x',$$

$$\Delta a = \frac{\Delta x}{v}.$$

# A Mathematikai és Physikai Társulat XVII. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 8-án tartott XVII. tanulóversenyre Budapesten 48, Kolozsvártt 7 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen felvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett 4 órai idő alatt Budapesten 29, Kolozsvártt 3 dolgozat adatott be. A mult évhez viszonyítva a versenyzők száma egygyel fogyott, ellenben a beadott dolgozatok száma 9-czel növekedett.

Ha a mult évben még azt hihettük, hogy a versenyzők számának a korábbi versenyekben résztvevőkéhez képest teljes 30 százalékkal való esése az új Műegyetem késői megnyitásával magyarázható, ezen esésnek immár két éven át való állandósága mélyebben fekvő okokra utal. Kérem is a versenyeinkben érdekelteket, hogy ez okon elmélkedni szíveskedjenek.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1. Bizonyíttassék be, hogy

$$-\tfrac{1}{2} \leqq ab+bc+ca \leqq 1,$$

ha

$$a^2+b^2+c^2=1$$

és $a$, $b$, $c$ valós számok.

2. Legyenek $a$, $b$, $c$, $d$ oly egész számok, hogy az

$$ac, \quad bc+ad, \quad bd$$

számok mindegyike osztható az $u$ egész számmal; bizonyíttassék be, hogy akkor $bc$ és $ad$ külön is oszthatók $u$-val.

3. Valamely háromszög egyik szöge $120^\circ$; e szöget bezáró két oldal mérőszáma $a$ és $b$. Mekkora ($a$-val és $b$-vel kifejezve) a $120^\circ$-os szög szögfelezője?

A versenydolgozatok nyomban a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes birálatra Rátz László igazgató úrnak adattak ki. A teljes biráló bizottság üléséről és határozatáiól az alábbi jegyzőkönyv számol be.

**Jegyzőkönyv**

a XVII. tanulóversenyen beadott mathematikai dolgozatok elbirálása ügyében 1910. évi október hó 30 án tartott ülésről. Jelen voltak: Beke Manó, Éber József, Kőnig Gyula, Kopp Lajos, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Rados Gusztáv, Szekeres Kálmán és Rátz László előadó.

A tanulóversenyen Budapesten 48, Kolozsvártt 7 főiskolai hallgató vett részt. A beadott dolgozatok száma Budapesten 29, Kolozsvártt 3.

Az előadó a verseny eredményéről beszámol, mire a bizottság a dolgozatokat behatóan megvizsgálja és a következő határozatot hozza:

A bizottság sajnálattal látja, hogy az idei verseny eredménye nem érte el a megelőző versenyek színvonalát, a mennyiben a versenytételek közül a másodikat egy versenyző sem tudta megoldani. Ez okból a bizottság az első díj kiadását nem hozhatja javaslatba. Sebestyén Ödön az impurumban a második tétellel is megpróbálkozott ugyan, s helyes úton indult annak megoldására, de eredményre még sem jutott, miért is a feladatot a tisztázatba fel sem vette, a mi mutatja, hogy a feladat nehézségeit felismerte. Vele ellentétben a többi versenyzők a töredékes kisérleteket teljes értékű bizonyításoknak vették, a nélkül, hogy a feladat lényegét megismerték volna. Ezen okoknál fogva a bizottság Sebestyén Ödön dolgozatának második részét is a többi versenyzők dolgozatai fölé helyezi. Minthogy pedig Sebestyén Ödön az első és harmadik feladatot kifogástalanul oldotta meg és dolgozatának fogalmazása is szabatos, a bizottság javasolja, hogy a második díjjal Sebestyén Ödön, a nagyváradi premontrei főgymnasium volt növendéke, Bertram Brunó főgymnasiumi tanár tanítványa jutalmaztassék. Az aránylag jobb dolgozatok közül a bizottság megemlíti Stärk Mór, Szidon Simon, Simkovics Endre dolgozatait.

Budapest, 1910. évi október hó 30-án.

*Rátz László*, előadó. *Kőnig Gyula*, elnök.

A f. évi november hó 10-én tartott választmányi ülés e jelentést helyeslőleg tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag hozzájárulván, azt határozattá emelte.

*

A választmányi ülést követő rendes ülésen báró Eötvös Loránd elnök átadta Sebestyén Ödönnek néhány üdvözlő és buzdító szó kiséretében a díjat, megbízva a nyertest, hogy a Társulat üdvözletét vigye volt tanárának is.

---

# A Mathematikai és Physikai Társulat XVII. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozat.*

**Sebestyén Ödön dolgozata.**

l. Bizonyíttassék be, hogy

$$-\tfrac{1}{2} \leqq ab+bc+ac \leqq 1,$$

ha

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$

és

$$a, \quad b, \quad c$$

valós számok.

*Bizonyitás.*

1°. Minthogy

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac = 1,$$

azért

$$2ab+2bc+2ca = (a+b+c)^2-1.$$

De

$$(a+b+c)^2 \geqq 0,$$

tehát

$$2ab+2bc+2ca \geqq -1,$$

vagy

$$-\tfrac{1}{2} \leqq ab+bc+ca.$$

2°. $2\,(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2ab+2bc+2ca=2.$

De

$$(a-b)^2 \geqq 0,$$

$$(b-c)^2 \geqq 0,$$

$$(c-a)^2 \geqq 0,$$

tehát

$$2ab+2bc+2ca \leqq 2,$$

vagy

$$ab+bc+ca \leqq 1.$$

---

* A dolgozat változtatás és javítás nélkül közöltetik. *Szerk.*

III. Valamely háromszög egyik szöge 120° ; e szöget bezáró két oldal mérőszáma $a$ és $b$. Mekkora $a$-val és $b$-vel kifejezve a 120°-os szög szögfelezője?

Jelöljük a háromszög területét $t$-vel, akkor

$$2t = ab \sin \gamma = av \sin \frac{\gamma}{2} + bv \sin \frac{\gamma}{2},$$

a hol

$$\gamma = 120°,$$

$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

tehát

$$2ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = av \sin \frac{\gamma}{2} + bv \sin \frac{\gamma}{2},$$

a honnan

$$v = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{(a+b)} = \frac{2ab \cdot \frac{1}{2}}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

# AZ IDŐJÓSLÁS ÚJ MÓDSZERE.

Nouvelle méthode de prévision du temps par GABRIEL GUILBERT, Lauréat du Concours International de Liège, secrétaire de la commission météorologique du Calvados. Avec une préface par BERNARD BRUNHES, directeur de l'Observatoire du Puy de Dôme. Paris, 1909.

Mint a természettudományok általában, a meteorologia is a mindennapi élet szükségleteinek hatása alatt keletkezett. Tengerparton a hajósnak, termő vidékeken a gazdának nagyon megkönnyíti a dolgát, ha tudja, hogy milyen időt várhat. Sok felesleges próbálkozástól megszabadul, idejét jobban fel tudja használni és azoknak a károknak sincs kitéve, a melyeket az időjárás viszontagságai okozhatnak, különösen, ha váratlanul állnak be. Mert a szabadban élő ember nemcsak a maga tapasztalatai, hanem az apáról fiúra szálló tapasztalati hagyományok alapján is tud valami következtetést vonni az időjárás várható eseményeire, de ezek a következtetések nem jobbak, mint más tapasztalati szabályok és sokszor beállnak hirtelen, előre nem látott változások. Szükség van tehát szigorú tudományos vizsgálódáson alapuló elvekre támaszkodó időjóslásra és ennek az érdekeit szolgálja a meteorologia.

A meteorologia a természettudományok általános fellendülése idején, a XIX. század folyamán kezdett természettudománynyá válni. Alapja, mint más természettudományoknak, a megfigyelés és kisérlet, de vele szemben a gyakorlat sürgetőbb, nem várjuk meg, míg a tudomány teljesen kifejlődik, hanem tekintet nélkül fejlettségi fokára, jóslást, gyakorlati tevékenységeinkhez irányítást várunk tőle. Ennek a várakozásunknak azonban eddigelé vajmi kevéssé tudott a meteorologia megfelelni, bár el kell ismernünk, hogy ez a tudomány is kivette részét abból a nagyarányú haladásból, a melyet a természetre vonatkozó ismereteink tettek a XIX. század folyamán. Alapos vizsgálat tárgyává tette a légkör jelenségeit, a levegő nyomásának a változásait, kutatta a hőmérséklet és nedvesség függőleges irányban való változásainak törvényszerűségét, megfigyelte a különböző szelek keringését. Hogy következtetéseit mennél számosabb és mennél pontosabban megfigyelt tényekre alapítsa, számos jól felszerelt állomás keletkezett, ezek távíró útján közlik észleléseiket egy-egy központtal, a hol az adatok összevetéséből állítják össze a jóslást a következő 24 órára.

Ennek az időjóslásnak igazi alapja a légnyomás eloszlása a föld felületén. A folytonosság elvéből is következik, hogy a légnyomás nem ugrásszerűen változik, hanem ha a föld egy helyén a barométer állása 755 mm, lesznek e hely közelében más helyek is, a hol ugyanennyit mutat a barométer. Ezeket a helyeket a térképen folytonos vonallal köthetjük össze és az így kapott szabálytalan, többnyire zárt görbét nevezzük *izobár*nak. Az izobár mentén tehát a légnyomás mindenütt ugyanaz, egyik oldalán nagyobb, a másikon pedig kisebb. Ha a térképen 5 mm-ről 5 mm-re megrajzoljuk az izobárokat, megkapjuk azt a vonalrendszert, a melyre az egész időjóslás lényegében támaszkodik. Az ilyen vonalrendszerben két fontos alakulás lehet. Előfordulhat az, hogy az egymás köré záródó, konczentrikus vonalak közül a legbelső jelzi a legalacsonyabb légnyomású helyeket és a többi vonalak kifelé menve fokozatosan nagyobb nyomásokat jeleznek. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a térkép ezen helyén alacsony nyomás, *depresszió* (ciklon) uralkodik. Az a hely, a hol a légsúlymérő higanyoszlopa a legalacsonyabb, az alacsony nyomás középpontja. Viszont, ha a konczentrikus vonalrendszeren a nyomás befelé nagyobbodik, a helyzet neve magas nyomás, *maximum* vagy anticiklon és a vonalrendszer a magas nyomás valamely középpontját zárja közbe. A meteorologiai megfigyelések főfeladata az alacsony és magas nyomás ezen középpontjainak megállapítása, mert a légköri jelenségek lefolyását ezeknek a hatásközéppontoknak a viselkedéséből kell és lehet előrelátni. Ezek közül is a depressziónak van nagyobb fontossága. A légnyomás változása, a maximumok és depressziók vonulása határozza meg általában a szelek erejét és irányát, a hőmérsékleti viszonyokat, de főleg a levegő nedvességi állapota, a légkör felhőssége az eső és szép idő a depresszió mai és holnapi helyzetétől függ. A maximumban a légnyomás csak lassan és kis mértékben változik, míg a depresszió területén erősebb változások is gyorsan, váratlanúl következnek be; a depresszió mozgékony, könnyen változtatja helyét, míg a magas nyomás állandóbb. A maximum enyhe, szép idővel jár; a szél és lecsapódás a depresszió kisérője. Mennél mélyebb a depresszió és mennél közelebb vagyunk az alacsony nyomás középpontjához, annál erősebb a szél, irányát pedig Buys-Ballot szabálya így határozza meg: minimum körül az északi féltekén jobbról balra, az óramutató járásával ellentett irányban keringenek a szelek, úgy hogy irányuk érintője a konczentrikus izobároknak. Pontosabban véve, ezek a szelek elhajlanak az érintőtől 10°—40°-nyira a középpont felé, úgy hogy a szélnek a középpont felé irányuló alkotója van. Ezért nevezhetjük az ilyen depresszióhoz tartozó szeleket *konvergens szelek*nek. A maximum közül a szelek általában az óramutató járásával ellenkező irányban keringenek és az érintőtől való elhajlásuk ép ellenkező értelmű, mint a depresszió esetén. Látszólag tehát ezek a szelek a magas nyomás középpontjából indulnak ki, ezért mondjuk, hogy ezek *divergens szelek*. Minthogy ezek az elnevezések okozták az ismertetendő új módszer alkalmazásában a legtöbb nehézséget, helyén való lesz már itt rámutatni arra, hogy mi okozhat nézeteltérést, illetve nehézséget. Ha a magas nyomás csak viszonylagos, a mikor két vagy több depresszió között elhúzódó területeken van csak valamivel magasabb nyomás, az egyik depresszióra nézve konvergens szelek a másikra vonatkozólag divergensek.

Minthogy tehát az időjárás alakulása ettől a kétféle légnyomási helyzettől függ, az időjóslás feladatát akkor oldjuk meg, ha a mai légnyomási állapotokból előre meg tudjuk állapítani, hogyan oszlik el majd a légnyomás 24 óra mulva, mely vidékeken lesz depresszió, illetve maximum.

A depressziók a föld keringése folytán általában nyugatról keletre, illetve pontosabban véve nyugat-délnyugatról kelet-északkelet felé haladnak. Történtek kisérletek arra nézve is, hogy összeállítsák azokat az utakat, a melyeket leggyakrabban követnek a depressziók, hiszen említettük, hogy a maximumok aránylag állandóbbak és mivel tudjuk, hogy az alacsony légnyomású helyek közül, melyeken felhős rendesen az ég, merre dúlnak viharok, hol száll le, illetve emelkedik a hőmérséklet, hol legerősebb a szél és hol lesznek csapadékok, ha tudjuk előre a depressziók útját és a maximumok helyzetét, meg van oldva az időjóslás feladata. A statisztikai módszer azonban nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket, mert a depressziók vonulása annyira szabálytalanúl változó, hogy törvényszerűségek megállapítása nem sikerült. A meteorologia ezért a legújabb időkig nem tudott a gyakorlati élet kivánalmainak megfelelni. Csodálatraméltó megfigyelő állomások a pontos adatok rengeteg halmazát szolgáltatják a világ minden részéről és mégis, ezt az értékes tapasztalati anyagot nem lehetett jóslások formájába önteni. A gyakorlati élet sürgetésére adott ugyan mindig jóslásokat a meteorologia, de jóslásainak csak valószínű értéke volt. Voltak ügyes meteorologusok, a kik egy hosszú élet tapasztalatai és egyes tapasztalati szabályok alapján aránylag elég helyes jóslást tudtak csinálni, de nem tudták eljárásukat elvi alapokra fektetni, nem tudták tanítani, hogy munkás utódok tovább fejleszthették volna. A klasszikus meteorologia legkiválóbb képviselői (Angot, Mascart, van Bebber, Hildebrandsson, Vincent stb.) is elismerik, hogy a meteorologia pontosan megokolható, észszerű jóslást adni nem tud, mert egyáltalán nem ismeri a depresszió alakulásának, fennmaradásának, sebességének, mozgásirányának, súlyosbodásának vagy enyhülésének, illetve megszünésének a törvényeit. Hogy lehessen olyan jelenségről előre számot adni, a minek az okát nem ismerjük. «A szinoptikus térképek vizsgálatából — írja a belga VINCENT — következtethetünk a hőmérsékletváltozások, tartós esők vagy szárazságok és viharok *közvetlen* okára. Ez az ok a légnyomás változó eloszlása a föld felületén. Tovább nem vezet bennünket a tudomány. De az kétségtelen, hogy ha akármilyen égi vagy földi jelenség befolyással van az időre, ez a befolyás csak közvetett és azért van, mert akár közvetlenül, akár más tényezők közvetítésével a levegő nyomásának a föld felületén való bizonyos eloszlását hozta létre». A mint ebből is látjuk, a meteorologia feladata az volna, hogy a légnyomás változásainak okát kutassa, ezt a feladatot azonban a klasszikus meteorologia eddigelé nem tudta megoldani. A jóslások egyéni képességeken alapulnak és a legtöbbször alig foglalnak magukban mást, mint a már *meglevő* időt. A legtöbb nagy vihar az utolsó 20 év alatt váratlanul következett be.

Harmincz évi kutatás, elméleti és gyakorlati munkásság alapján áll most a világ elé GUILBERT egy új módszerrel, a melyről azt állítja, hogy szigorúan elvi alapokon épül fel és így akárkinek a kezében is ép oly sikerekre vezet, mint a milyeneket ő ért el ezalatt a három évtized alatt. A míg a régi eljárással a jóslások 10—20%-a is alig válik be, GUILBERT azt állítja, hogy az ő módszere alapján legalább az esetek 75%-ában helyes jóslást lehet adni. De a legfontosabb előnye mégsem ebben, hanem az elvszerűségében van: elvégre is ez a módszer sem csalhatatlan, akármilyen szigorúan alkalmazzuk is szabályait, előfordulhatnak váratlan viharok, vagy más előre nem látott események. De minden esetben megtudjuk adni az okát, hogy miért nem volt helyes a jóslás, miért nem láthattuk előre a bekövetkezett változásokat. Nem ez az első fellépése GUILBERTnek, mert eltekintve attól, hogy rendszerét az utolsó 20 év alatt többször ismertette és bocsátotta a szakemberek bírálata alá, ezenkívül a Liègeben rendezett nemzetközi időjóslási versenyen is sikerült módszerének kiválóságát beigazolni. Lássuk tehát miben áll ez a módszer.

GUILBERT maga mondja meg, hogy rövid határidőre szóló időjóslási módszere a *normális szél* elvén alapszik. *Normális az olyan szél, a melynek erőssége egyenesen arányos a barometrikus gradiens értékével.* Mindenekelőtt a barométrikus gradiens fogalmát akarom megvilágítani. A magas nyomás középpontjából kiindulva haladjunk az izobárokra merőleges vonalon, akkor ezen vonal mentén a légnyomás fokozatosan csökken. A légnyomásnak egy æquatori fokra (111 km.) eső csökkenését választjuk mértékül és ezt nevezzük barométrikus gradiensnek. Mennél nagyobb ez a gradiens, annál erősebb szelek keringenek a depresszió középpontja körül, de minden gradiens-értéknek megfelel egy bizonyos szélerősség, a melyet a tapasztalat alapján ezen érték mellett normálisnak tekinthetünk. Anomáliák azonban gyakran észlelhetők mindkét irányban; lehetnek a szelek erősebbek vagy gyengébbek a normálisnál. Ha a gradiens egy æquatori fokra 1 mm; az ennek megfelelő normális szél erőssége 2 abban az általánosan használatos BEAUFORT-féle skálában, a melyben 0 jelzi a szélcsendet és 9 a nagy vihart. Fokonkint 2 mm. gradiensnek megfelelő normális szélerőssége 4, a 3 mm-nek megfelelőé 6. Ha tehát a szél erőssége 5, ez magában véve még nem jelent semmit, mert 3 mm. fokonkénti gradiens mellett ez a szél nagyon is gyenge, míg kisebb (1—2 mm.) gradiens esetén túlságosan erős.

Pusztán a szélnek a talaj fölött való erősségéből és a barométrikus gradiensből már meg lehet állapítani a légnyomás közeli változásait. A depresszióban ugyanis kétféfe erő működik: a gradiens czentrifugális erőt képvisel, a szél czentripetálist. Normális szél esetén ez a két erő egyensúlyban van és ezért a levegő nyomása csak kevéssel változhatik. Ha azonban a depresszió egyetlen pontjában ezen erők akármelyike túlsúlyban van, az egyensúlyi állapot megbomlik és a levegő nyomása nagyobb mértékben változik. Ha a szél a normálisnál erősebb, a barométer emelkedni fog, ha pedig gyengébb, a barométer sülyedni fog, a depresszió mélyebb lesz. BRUNHES ezt a következtetést fejezi ki az első szabályban azon három közül, a melyekben ő a GUILBERT-féle módszer lényegét összefoglalja: *Az olyan depresszió, a mely a rendesnél erősebb szeleket kelt, többé-kevésbé gyorsan megszűnik.*

Ha a depresszió körül a szél mindenütt túlságosan erős a gradiens értékéhez képest, a depresszió összébb szorul és megszűnik. Ez azonban csak ritkán történik így. Gyakoribb az az eset, hogy egy vagy több oldalon a depressziót a rendesnél erősebb szelek veszik körül, viszont más oldalon túlságosan gyengék, vagy legalább is normálisak. Ilyen esetben a depresszió elmozdul helyéből. Minthogy pedig a rendesnél erősebb szelek mintegy korlátot vonnak előtte, szinte természetes, hogy a depresszió abban az irányban mozog, a merre kisebb ellenállásra talál; az ellenállás pedig ott kisebb, a hol aránylag gyengébbek, vagy az alacsony nyomás szóban forgó középpontjára nézve divergensek a szelek. Így kell érteni a GUILBERT-féle második szabályt, a mely BRUNHES fogalmazásában így szól: *A depresszió a kisebb ellenállású tájak felé mozog.*

Látjuk tehát, hogy a normális szél elvével raczionális és biztos alapot nyerünk nemcsak arra, hogy előrelássuk a levegő nyomásának változásait, hanem annak a meghatározására is, hogy valamely depresszió súlyosbodik-e vagy sem, elpusztul-e vagy még mélyebbé válik, visszafelé megy-e vagy többé-kevésbé szabályos pályán előre fog-e törni. Elég jó megközelítéssel megállapíthatjuk ezenkívül még azt a helyet is, hogy hol lesz 24 óra mulva az alacsony nyomás középpontja. Szóval meg tudjuk oldani a depressziók három nagy problémáját: mélységüket, továbbá mozgásuk irányát és sebességét. De még tovább is mehetünk. Felvethetjük azt a kérdést, hogy hol fog a legnagyobb mértékben megváltozni a barométer állása. Ezt a rendkívül érdekes problémát feltevés útján oldjuk meg, a mely szerint *a levegő a rendesnél erősebb szélre merőleges irányban áramlik.* Tehát a levegő nyomása ennek a merőlegesnek a mentén emelkedik, illetve esik. A konvergens szelek e szerint levegőt visznek az alacsony nyomás középpontja felé, vagyis a depresszió megszüntetésére törekszenek, a divergens szelek ellenben széthordják a levegőt, űrt hagynak maguk után, ez az űr pedig a depresszió. Ebből látjuk, hogy a maximumok természetszerűleg lassankint megszünnek, mert körülöttük a szelek mindig divergensek és gyakran túlságosan erősek. Látjuk továbbá azt is, hogy mi vezethet a depressziók keletkezésére. Az idevonatkozó megfigyelések eredménye gyanánt állapítja meg Guilbert a következő törvényt: *A légköri nyomás közvetlen okozati összefüggésben áll a felületi áramokkal. Eltolódásai a szelekre merőleges irányokban a szélnek a barométrikus gradienshez viszonyított sebességével arányosan mennek végbe.* Ezt veszi Brunhes a Guilbert-féle módszer harmadik szabályának. Maga a gondolat teljesen eredeti és az egész módszerre alapvető fontosságú.

A normális szél módszere tehát a felületi áramok iránya és ereje alapján meghatározza a levegőnyomás közeli változásait. A szél iránya jelzi a nyomás mozgásainak irányát, a mely mindig merőleges a szél irányára, a gradienshez viszonyított sebessége pedig a barométrikus változások nagyságát. Ha ennek az elvnek alkalmazásával sem helyes a jóslás, akkor az elvet nem alkalmazták helyesen. A hibás alkalmazás oka nemcsak a személyben lehet, hanem — a mint említettük — nehézzé teheti a jóslást az is, hogy több depresszió-középpontot kell egyszerre tekintetbe venni. A legtöbb hirtelen változás oka azonban az, hogy az Atlanti Oczeánról váratlanúl érkezik meg egy-egy depresszió. Az ilyen oczeáni depressziók régóta sok gondot okoznak a meteorologusoknak, mert váratlan megérkezésükkel teljesen értéktelenné tehetik a legalaposabb jóslást is. Gordon Bennet úgy próbált ezen segíteni, hogy távirati értesítést küldött Európa nyugati partjaira azokról a depressziókról, a melyek Amerika partjait elhagyva Európa felé indulnak, de ez nem javított a helyzeten, mert ilyen hosszú úton sok depresszió megsemmisül és az oczeánon újabbak keletkezhetnek. Mindenesetre nagy haladást fog jelenteni, ha a dróttalan távírói szolgálat szervezésével az oczeánon át is pontosabban lehet majd követni a depressziók vonulását, de Guilbert ezt már több mint két évtized óta tudja nélkülözni azzal, hogy az oczeáni depressziók közeledésére a felhők megfigyelése alapján következtet.

A jóslás összeállításában ő a következő eljárást ajánlja. Első dolog a jelentések alapján megrajzolni az izobárokat, megjelölve mindenütt a szelek irányát és erejét. Ha ez megtörtént, akkor a térképen nem látható, de az Oczeán felől esetleg közeledő depressziók felfedezése végett folyamodunk a felhőmegfigyelésekhez és pedig azt nézzük meg, vannak-e cirrusok. Mert a cirrusok létezéséből fontos következtetést vonhatunk Guilbertnek a következő szabálya alapján: *A cirrusok az alacsony nyomás középpontjából jönnek és sebességük arányos a depresszió mélységével.* Ha a cirrusok segítségével megállapítottuk, hogy merre van a közeledő depresszió és milyen sebességgel közeledik, akkor vizsgálat alá veszszük az Európában uralkodó szeleket, különösen azokon a vidékeken, a merre a depresszió vonulni törekszik. Azt nézzük, hogy erre a közeledő depresszióra nézve konvergensek-e, vagy divergensek a szelek. Mert tudjuk, hogy a konvergens szelek akadályként állanak a depresszió útjában és pedig annál erősebben, mennél erősebb a szél, míg a divergens szelek úgyszólván maguk felé vonzzák a depressziót. A szelek iránya és erőssége mellett tekintetbe kell vennünk még azt is, hogy miképen viselkedik a barométer a veszélyben álló helyeken. Mert ha a konvergens szél gyenge és már a barométer sülyedése is észrevehető, az ellenállásnak erősen közeledő depresszióra nem lesz hatása, míg ha a szél erős és a barométer sem kezdett el még sülyedni a legtávolabb fekvő állomásokon sem, a következő szabály érvényesül: *Minden depresszió, a mely az Oczeánról érkezve túlságosan erős szeleket kelt, nem tud előrehaladni és megállapodik, sőt esetleg vissza is fordul keletkezési helye felé.*

Mihelyt a depresszió elérte az európai partokat, úgy hogy pontosan meg lehet állapítani a gradienseket, a felhőmegfigyelés fontossága másodrangúvá lesz, elég alapot ad a jóslásra a normális szél elve.

A jóslás szempontjából nincs semmi különbség a szárazföldi és tengerparti meteorologiai állomások között, mindegyiknek a megfigyelései egyformán fontosak. Ellenben a magasabban fekvő állomásokkal kivételt kell tennünk, mert ezeknek az adatait teljesen figyelmen kívül kell hagynunk. A tapasztalat ugyanis azt mutatja, hogy a hegyi obszervatoriumok jelentéseiben szereplő legerősebb szeleknek sincs semmi befolyásuk a légnyomásnak a föld felületén való változására. Kissé különösnek hangzik ugyan, de míg a felhőknek — még a legalacsonyabban mozgó cumulusnak is — tagadhatatlanul határozott jelentősége van a depressziók mozgása szempontjából, a felhők magasságában dúló szeleknek erre a mozgásra nincs semmi befolyásuk. Megmagyarázni nem tudjuk ezt az ellenmondást, de ha figyelemmel kisérjük a depressziók vonulását, azt látjuk, hogy a kisebb ellenállású helyek felé vivő útjukat a legmagasabb hegyek, a legösszefüggőbb hegytömegek sem változtatják meg. A jósló meteorologus tehát Európát teljesen síknak tekintheti, mint a milyen az előtte levő térkép, rá nézve csak a felületi légáramlatoknak van fontossága. Ezeknek a befolyását a hőmérsékleti viszonyok sem változtatják meg. «*Sem termikus, sem dinamikai okok nem működnek közre; pusztán mechanikai hatások irányítják a barométer ingadozásait és ezek a mechanikai erők csak a felületi áramokban mutatkoznak, csak ezekben mérhetők és értékelhetők*».

Guilbert távolról sem akarja azt a hitet kelteni, hogy módszere tökéletes, hogy vele a meteorologia teljesen ki van merítve. Tudja, hogy maga a módszer is tökéletesítésre szorul és ha tökéletes is lenne, akkor is maradnának még a meteorologiának megoldásra váró feladatai. A jövendő fejlődés útját nagyon helyesen jelöli ki: a mi jelenleg qualitativ a módszerében, azt quantitativvá kell tenni, a méréseket tökéletesíteni és ezzel a jóslást mind pontosabbá tenni. Legyen szabad itt befejezésül Guilbert szavait idéznem:

«Jobban ki kell aknáznunk a most ismertetett törvényeket és arra kell törekednünk, hogy a lehető leghasznosabbá tegyük őket. A számításnak kell mind nagyobb teret nyernie, hogy segítségével meg tudjuk majd valamikor határozni, mekkorának kell lennie a szél rendellenes sebességének, hogy ilyen vagy amolyan mély depresszió megszünését jósolhassuk meg. Ki kell tudnunk számítani, hogy mennyi idő alatt emelkedik adott pontban $x$ milliméterrel a levegő nyomása; hány óra alatt fog valamely ismeretes depresszió megszűnni, vagy fordítva, hány óra alatt fog megszűnni valamely maximum. Szükségkép el kell érnünk, hogy 1 mm. pontossággal ki tudjuk számítani a barométer következő 24 órára eső változásait.

«E számítások elemeit a gradiensek pontos mérésében, továbbá a szelek irányának és sebességének pontos meghatározásában találhatjuk meg. Nem lesz tehát elég a szél erejét megegyezésen alapuló skála szerint megbecsülni és megközelítő számmal kifejezni; ezt az értéktelen tényezőt gondosan szerkesztett precziziós anemométer leolvasásával kell helyettesíteni.

«A barométer és anemométer lesz a jövendő meteorologiájának, a tudományos meteorologiának két főeszköze. Ezek fogják szolgáltatni az észszerű időjóslás kiszámításához szükséges legfontosabb elemeket. Ebből a szempontból félreteszszük a hőmérőt is, meg a nedvességmérőt is, mert ezeknek csak nagyon relativ hasznuk van a jóslásban. Ezek sokkal inkább tények megállapítására, mint sejtetésére való eszközök.

«De az említett számítások bizonyára nem fognak arra szorítkozni, hogy a légnyomás naponkénti változásának nagyságát megjósolják, hanem pontosan meg lehet majd segítségükkel rajzolni a következő nap izobártérképét. Ez a térkép törekvéseink állandó tárgya és hogy ezt teljesen elérjük, numerikusan meg kell oldanunk 1 mm. pontossággal a barométrikus változások nehéz problémáját. Ezeket a számításokat mindenesetre sok tudós fizikus vagy meteorologus meg fogja próbálni, a kik nem akarják, hogy sokáig várjunk erre a nagyon termékeny tanulmányra. A holnapi térkép szerkesztése akkor különösen pontos lesz és a mikor pusztán számítás alapján százszámra vagy ezerszámra megrajzoljuk a holnapi térképet, nem lehet-e majd akkor megjósolni a nyomás változásait nemcsak holnapra, hanem holnaputánra is?»

*Kelemen Ignácz.*

# A MATHEMATIKA JÖVŐJE.

(Felolvasták az 1908 ápr. 6—10. tartott IV. mathematikai kongresszuson Rómában.)

Ha a mathematika jövőjébe akarunk tekinteni, a helyes eljárás az, hogy történetét és jelenlegi állapotát tanulmányozzuk.

Nemde ez a foglalkozás némiképen nekünk, mathematikusoknak, a feladataink körébe tartozik? Hozzászoktunk az *extrapoláczió* műveletéhez, a melynek segélyével a jövőt a multból és jelenből vezetjük le, minthogy pedig ismerjük ennek az eljárásnak értékét, az a veszedelem sem fenyeget, hogy a belőle származó eredmények jelentőségét túlbecsüljük.

Baljósokban sohasem volt hiány. Ezek rendesen azt emlegetik, hogy már minden megoldható probléma meg van oldva és szerintük csak a szüretelés van hátra. Szerencsére a mult példája megnyugtat bennünket. Sokszor hitték már, hogy megoldottak minden feladatot, vagy legalább is leltárba gyűjtötték azokat, a melyeknek a megoldása lehetséges. És akkor a megoldás szó értelme bővült, a megoldhatatlan problémák váltak valamennyi között a legérdekesebbekké és más feladatokat tűztek ki, a melyekre azelőtt nem is gondoltak. A görögöknél az volt a jó megoldás, a melynél csak körzőre és vonalzóra volt szükség, később az, a melyiket négyzetgyökvonások útján kapunk, majd az, a melyben csak algebrai, vagy logaritmikus függvények szerepelnek. A pesszimisták ilyenformán mindig azt látták, hogy megczáfolják őket, mindig kénytelenek voltak visszavonulni, úgyhogy azt hiszem, ma már egészen nyomuk veszett.

Szándékom tehát nem az, hogy velük harczra keljek, mert kipusztultak; jól tudjuk, hogy a mathematika folytatja fejlődését; de azt akarjuk tudni, hogy milyen irányban. Azt fogják erre válaszolni, «minden irányban» és ez részben igaz is, de ha ez teljességgel igaz volna, az kissé borzasztó lenne. Kincseink hamarosan lehetetlenné tennék a mozgást és elhalmozódásuk ép oly áthatolhatatlan tömkeleget hozna létre, mint a milyen áthatolhatatlan volt a tudatlan előtt az ismeretlen igazság.

A történetírónak, söt a fizikusnak is válogatnia kell a tények között; a tudós agya a világegyetemnek csak egy zuga és sohasem foglalhatja magába a világegyetemet teljes egészében; úgy hogy a között a megszámlálhatlan sok tény között, a melyet a természet elénk tár, vannak olyanok, a melyeket figyelmen kívül hagyunk és mások, a melyeket megtartunk. Annál inkább így van ez a mathematikában; a mathematikus sem tudja a kinálkozó tényeket válogatás nélkül mind megtartani; annál kevésbé, mert e tényeket ő, majdnem azt mondhatnám, az ő szeszélye alkotja. Egészen ő szerkeszti az új kapcsolatot, úgy hogy az elemeket közelebb hozza egymáshoz; általában a természet nem adja azt készen.

Kétségkívül előfordul néha, hogy a mathematikus azért foglalkozik valamely feladattal, hogy kielégítse a fizika valamilyen szükségletét, hogy a fizikus vagy a mérnök kivánságára kiszámítson egy számot valamely alkalmazás céljából. De azért lehet-e azt mondani, hogy nekünk mathematikusoknak arra kell szorítkoznunk, hogy parancsokra várjunk és a helyett, hogy tudományunkat a magunk gyönyörködtetésére mívelnők, ne legyen más gondunk, mint hogy ügyfeleink izléséhez alkalmazkodjunk? Ha a mathematikának nincs más célja, mint hogy segítségére legyen azoknak, a kik a természetet tanulmányozzák, akkor az utóbbiaktól kell várnunk az irányítást. Jogosult-e a helyzet ilyen megitélése? Bizonyára nem; ha mi nem míveltük volna az exakt tudományokat önmagukért, nem teremtettük volna meg a mathematikai szerszámot és a mikor elkövetkezett volna a fizikus parancsa, fegyvertelenek lettünk volna.

Ép így fizikusok nem várják meg, hogy valamely jelenség tanulmányozását az anyagi élet egyik vagy másik szükséglete szükségszerűvé tegye; helyesen is teszik; ha a XVIII. század tudósai elhagyták volna az elektromosságot, mivel ez az ő szemükben gyakorlati hasznot nem nyújtó érdekes dolog volt, a XX. században nem volna telegráfunk és nem tudnánk semmit az elektrochemiáról, sem az elektrotechnikáról. A fizikusokat, a mikor választani kénytelenek, választásukban nemcsak a hasznosság vezeti. Hogy járnak hát el, hogy választanak a természet tényei közül? Ezt könnyen megmondhatjuk; azok a tények érdeklik őket, a melyek valami törvényszerűség felfedezésére vezethetnek; tehát azok, melyek sok más tényhez hasonlítanak és a melyek nem látszanak teljesen elszigetelteknek, hanem másokkal közvetlenül összetartozóknak. Az elszigetelt tény megragad minden szemet, a közönséges emberét ép úgy, mint a tudósét. De a mit csak az igazi fizikus tud meglátni az a több olyan tényt összekötő kapcsolat, a melyek hasonlósága mély, de rejtett. NEWTON almájának az anekdotája valószinűleg nem igaz, de szimbolikus, beszéljünk tehát róla úgy, mintha igaz volna. Nos tehát, azt el kell hinnünk, hogy sok ember látott már NEWTON előtt almát lehullani; és senki sem tudott belőle semmit sem következtetni. A tények terméketlenek volnának, ha nem volnának kiválogatásukra képes szellemek, úgyhogy különválasztják közülök azokat, a melyek mögött rejlik valami és felismerik azt, a mi mögöttük rejlik, oly szellemek, a kik a nyers tény alatt megérzik a tény lelkét.

A mathematikában teljesen ugyanezt teszszük; a rendelkezésünkre álló különböző elemekből a különböző kapcsolatok millióit állíthatjuk elő; de egyetlen ilyen kapcsolat, ha elszigetelten veszszük, teljesen értéktelen; gyakran sok fáradságunkba kerül a megszerkesztése, de ez nem ér semmit, hacsak a középiskolai tanításban gyakorló feladatnak nem alkalmas. Egész másként áll a dolog, ha ez a kapcsolat a hasonló kapcsolatok valamely osztályában foglal helyet és ha ezt a hasonlóságot észreveszszük; akkor nem egyetlen ténynyel lesz dolgunk, hanem törvénynyel. És ekkor az igazi felfedező nem az a munkás lesz, a ki türelmesen felépített nehány ilyen kapcsolatot, hanem az, a ki rokonságukat nyilvánvalóvá tette. Az első pusztán a nyers tényt látta, csak a másik érezte meg a tény lelkét. E rokonság kimutatására gyakran elég volt egy új szót találnia és ez a szó teremtő erejű volt; a tudomány története egész tömeg olyan példát szolgáltathatna erre, a melyeket jól ismerünk.

MACH, a kiváló bécsi filozófus, azt mondotta, hogy a tudomány feladata gazdaságosságot létrehozni a gondolkodásban ép úgy, mint a hogy a gép gazdaságosságot teremt a munkában. És ez nagyon igaz. A vadember ujjain, avagy apró kavicsok egymás mellé rakása útján számol. A mikor a gyermekeket megtanítjuk az egyszeregyre, evvel azt érjük el, hogy később számtalan kavics-műveletet takaríthatnak meg. Valaki egyszer rájött, kavicsokkal, vagy valahogy másképen, hogy hatszor hét az negyvenkettő és az a gondolata támadt, hogy ezt az eredményt megjegyezze és ezért nem szükséges nekünk újra kezdenünk. Ez az ember nem pazarolta el idejét, még ha pusztán csak a maga gyönyörűségére számolt is; ez a művelet neki csak két perczébe került, de két milliárdot vett volna igénybe, ha még utána egy milliárd embernek előlről kellett volna kezdeni.

Valamely tény fontosságának mértéke tehát, a belőle származó haszon, vagyis az a gondolatmennyiség, a melyet segítségével megtakaríthatunk.

A fizikában nagyon termékenyek azok a tények, a melyek valami nagyon általános törvényre vezetnek, mert ezek lehetségessé teszik, hogy igen nagy számú mást tényt előre lássunk és ez nincs máskép a mathematikában sem. Neki ülök valami bonyolult számításnak és nagynehezen eredményre jutok; fáradságomnak nincs jutalma, ha ez nem tett képessé arra, hogy más hasonló számítások eredményeit előre lássam és hogy azokat határozott irányban vezethessem, kikerülve azokat a tapogatózásokat, a melyeken először kénytelen voltam átesni. Viszont nem vesztettem el időmet, ha ezek a tapogatózások végül föltárták előttem a tárgyalt feladatnak más feladatoknak sokkal terjedelmesebb osztályához való mélyreható hasonlatosságát; ha megmutatták nemcsak a megegyezéseket, hanem egyszersmind a különbségeket is, ha egyszóval meglátatták velem, hogy általánosítás lehetséges. Akkor nem új eredményt nyertem, hanem új erőt.

Önkéntelenül eszünkbe ötlik, mint ennek egyszerű példája, valamely algebrai képlet, a mely a számbeli feladatok egy typusának megoldását szolgáltatja, ha a betűket számokkal helyettesítjük. Neki köszönhetjük, hogy egyetlen algebrai számítás árán megtakaríthatjuk azt a fáradságot, hogy szakadatlanul újra kezdjünk új numerikus számításokat. De ez csak durva példa; mindnyájan érezzük, hogy vannak képletben ki nem fejezhető hasonlóságok és ép ezek a legbecsesebbek.

Ha valamely új eredménynek értéke van, ez abban rejlik, hogy a mikor a régen ismert, de eddigelé szétszórt és egymással szemben idegeneknek tetsző elemeket összekapcsolja, egyszerre rendet teremt ott, a hol látszólag rendetlenség uralkodott. Ekkor lehetővé teszi, hogy egy pillantással áttekinthessük ez elemek mindegyikét és lássuk, milyen helyet foglalnak el az összességben. Ez az új tény nemcsak értékes magában véve, hanem épen csak ez ad értéket valamennyi régi ténynek, a melyet összekapcsol. Szellemünk gyenge, úp úgy mint érzékeink; elveszne a világ bonyodalmasságában, ha ez a bonyodalmasság nem volna harmonikus, csak részleteit látná, mint valami rövidlátó és kénytelen volna elfelejteni ezen elemek mindenikét, mielőtt a következőt vizsgálná, mert nem volna képes mindent magába zárni. Csak azok a tények méltók figyelmünkre, a melyek rendet teremtenek ebben a bonyolultságban és így számunkra hozzáférhetővé teszik.

A mathematikusok nagy fontosságot tulajdonítanak módszereik és eredményeik eleganicziájának és ez nem puszta kedvtelés. Mert mi is kelti fel lelkünkben valamely megoldás, valamely bizonyítás elegancziájának érzékét? A különböző részek harmóniája, szimmetriája, szerencsés elosztása; szóval minden, a mi rendet teremt benne, minden, a mi egységessé teszi, a mi következéskép lehetővé teszi, hogy tisztán lássunk benne és egyszerre megértsük az összeséget ép úgy, mint a részleteket.

De pontosan véve egyszersmind ép ez teszi nagyon hasznossá is, mennél világosabban látjuk ezt az összeséget és mennél könnyebben áttekinthetjük egy szempillantással, annál jobban észreveszszük más közelálló tárgyakhoz való hasonlóságát és ennek folytán annál több valószinűséggel várhatjuk a lehetséges általánosítások megtalálását. Az eleganczia eredhet a véletlen érzéséből, a melyet olyan tárgyak váratlan találkozása idéz elő, a melyek egymáshoz közeledése szokatlan; ilyenkor is termékeny, mivel eddigelé ismeretlen rokonságokat fed föl előttünk; sőt termékeny akkor is, a mikor forrása csak az eszközök egyszerűségének és a kitűzött feladat bonyolultságának ellentéte; ilyenkor felkelti gondolkodásunkat az iránt, hogy mi az oka ennek az ellentétnek és leggyakrabban azt látjuk, hogy ez az ok nem a véletlen, hanem valamely nem gyanított törvényszerűség. Szóval a mathematikai eleganczia érzése nem más, mint az épen felfedezett megoldás és szellemünk szükségletei közt fennálló valaminemű megegyezés okozta megelégedettség és épen ezen megegyezés következtében szolgálhat eszközünk gyanánt ez a megoldás. Ennélfogva ez az esztétikai megelégedettség kapcsolatos a gondolkodás gazdaságosságával. Így van az pl.: hogy az Erechtheion kariatidái elegánsaknak tetszenek, mert nehéz terhüket könnyedén és úgyszólván jó kedvvel viselik és ennek következtében a munka gazdaságosságának érzését keltik bennünk.

Ugyanez az oka annak, hogy a mikor kissé hosszas számítás valami egyszerű és meglepő eredményre vezetett bennünket, mindaddig nem nyugszunk meg, a míg ki nem mutattuk, hogy *előreláthattuk* volna, ha nem is ezt az egész eredményt, legalább legjellemzőbb vonásait. Miért? Mi gátol meg bennünket abban, hogy megelégedjünk olyan számítással, a mely látszólag mindenre megtanított, a mit tudni akarunk? Ez azért van, mert hasonló esetekben a hosszú számítás már nem felelne meg a czélnak, ellenben ez nem áll arra a gyakran félig intuitiv okoskodásra, a melynek alapján az előrelátás lehetséges lett volna. Mivel ez az okoskodás rövid, egy pillantással látjuk minden részletét, úgy hogy rögtön észreveszszük, mit kell rajta változtatnunk, hogy a felmerülhető hasonló természetű feladatok mindegyikére alkalmazhassuk. Minthogy pedig előreláthatóvá teszi, hogy e feladatok megoldása egyszerű lesz-e, legalább felvilágosít bennünket arról, hogy érdemes e belefogni a számításba.

Az imént mondottak alapján kimutathatjuk, hogy mennyire hiábavaló volna megpróbálni, hogy mechanikus eljárással helyettesítsük a mathematikus szabad kezdeményezését. Ha valósággal értékes eredményhez akarunk jutni, nem elég a számvetést elrendezni, vagy olyan géppel rendelkezni, a mely a dolgokat rendbeszedi; nem pusztán a rend ér valamit, hanem a váratlan rend. A gép dolgozhat a nyers tényen, de a tény lelke elveszett dolog rá nézve.

Az utolsó század közepe óta a mathematikusok mindinkább törekednek a feltétlen szigorúság elérésére; ezt helyesen is teszik és ez a törekvés mind erősebben jut érvényre. A mathematikában a szigorúság még nem minden, de nélküle nincs semmi; ha valamely bizonyítás nem szigorú, akkor az teljesen semmis. Azt hiszem, ezt az igazságot senki sem fogja kétségbe vonni. De ha nagyon szószerint vennők, akkor arra a következtetésre jutnánk, hogy pl.: 1820 előtt nem volt mathematika; ez határozottan túlzás lenne; ezekben az időkben a mathematikusok rendesen hallgatólag odaértették, a mit mi terjedelmesen kifejtünk; ez nem jelenti azt, hogy egyáltalán nem látták; de túlságos gyorsan túlmentek rajta, pedig hogy jól lássák, kellett volna annyi fáradságot venniök, hogy meg is mondják.

Csakhogy mindig szükséges-e, hogy annyiszor megmondjuk? A kik először emelték ki, hogy a szigorúság mindenekelőtt való, kifejtettek olyan gondolatmeneteket, a melyek utánzását megpróbálhatjuk; de ha a jövendőben a bizonyításokat ezen a módon kell felépíteni, a mathematikai értekezések majd nagyon megnyúlnak; s ha a hosszúságtól félek, nemcsak azért teszem ezt, mert attól tartok, hogy a könyvtárak meg fognak telni, hanem mert azt hiszem, hogy bizonyításaink ezen meghosszabbodás következtében elvesztik a harmóniának azt a látszatát, a melynek fontos szerepét az imént fejtegettem.

A gondolkodás gazdaságosságát kell szem előtt tartani, tehát nem elég utánzásra alkalmas mintákat szolgáltatni. Az kell, hogy az utánunk jövők már nélkülözhessék ezeket a mintákat és a helyett, hogy valamely már elvégzett gondolatmenetet ismételnének, nehány sorban összegezzék. És ez már gyakran sikerült is; volt pl.: a gondolatmeneteknek egész csoportja, a melyek mind hasonlítottak egymáshoz és mindenütt előfordultak; teljesen szigorúak, de hosszadalmasak voltak; egyszer csak kidondolták az *egyenletes összetartás* kifejezését és ez az egy kifejezés feleslegessé tette őket; már nem kellett elismételni, mert oda lehetett gondolni. A nehézségek szőrszálhasogatói tehát kettős szolgálatot tehetnek; először is, mert megtaníthatnak, hogy szükség esetén úgy járjunk el, mint ők, de főleg, mert a leggyakrabban lehetővé teszik, hogy ne tegyünk úgy, mint ők, a nélkül, hogy azért a szigorúságból bármit is feláldoznánk.

Láttuk, egy példán, mily fontossága van a szóknak a mathematikában, de sok mást is idézhetnénk. El se tudnók hinni, mennyire gazdaságossá teheti a gondolkodást egy jól megválasztott szó, a mint MACH mondta. Nem tudom, nem mondtam-e már valahol, hogy a mathematika az a művészet, hogy különböző dolgokat egy névvel illetünk. Ezt érteni kell. Meglehet, hogy ezek az anyagukra nézve különböző dolgok alakjukban hasonlók, hogy úgyszólván ugyanazon mintába önthetők. Mihelyt a kifejezést jól megválasztottuk, teljesen meglep, a mikor azt látjuk, hogy valamely ismeretes tárgyra készült minden bizonyítás közvetlenül alkalmazható sok más új tárgyra is, semmit sem kell rajta változtatnunk, még a szavakat sem, minthogy a nevek ugyanazok lettek.

Rögtön eszembe jut erre egy példa, a quaterniók, a melyekről nem kell sokat beszélnem. A leggyakrabban egy jól választott szó elegendő a régi nyelven kifejezett szabályok kivételeinek eltüntetésére; ezért gondolták ki a negativ számokat, az imaginárius számokat, a végtelenben fekvő pontokat és nem tudom én még mit. És ne felejtsük el, hogy a kivételek károsak, mert elhomályosítják a tételeket.

Íme, ez a nagyon termékeny tények egyik ismertető jellemvonása; ezek azok, a melyek ezeket a szerencsés nyelvbeli újításokat engedik meg. Maga a nyers tény ilyen esetekben gyakran majdnem érdektelen, sokszor előfordulhatott a nélkül, hogy nagy szolgálatot tett volna a tudománynak; csak azon a napon jut értékhez, a mikor valamely ügyesebb gondolkodó észreveszi azt a megegyezést, a melyet világossá tesz és ezt egy szóval jelzi.

Másrészről a fizikusok úgyanúgy járnak el; kitalálták az energia szót és ez a szó csodálatos módon termékeny volt, mert ez is a kivételek kiküszöbölésével alkotta meg a törvényt, úgy hogy anyagukban különböző és alakjukra nézve hasonló dolgokat ugyanazon névvel illetett.

Azok közül a szavak közül, a melyek a legszerencsésebb befolyást gyakorolták, megemlítem a csoport és invarians szót. Ezek sok mathematikai okoskodás lényegét ismertették fel velünk; megmutatták ezek, hogy hány esetben vizsgáltak a régi mathematikusok csoportokat a nélkül, hogy tudnák és hányszor történt az, hogy a mikor azt hitték, hogy nagyon eltávolodtak egymástól, egyszerre csak azt vették észre, hogy egymáshoz közelednek a nélkül, hogy tudták volna miért.

Ma azt mondanók, hogy isomorph csoportokat vizsgáltak. Most tudjuk, hogy valamely csoportban az anyag csak kevéssé érdekel bennünket, hogy csak az alaknak van fontossága és a mikor egy csoportot ismerünk, már ennek folytán ismerjük az összes isomorph csoportokat; és az átmenet közvetlenül lehetséges a gondolkodás minden megfeszítése nélkül a csoport és isomorphismus szavak használata folytán, a melyek néhány szótagba sűrítik össze és rögtön megértetik mindenkivel ezt a finom szabályt. A csoport fogalma másrészről kapcsolatos az átalakításával; miért tulajdonítunk oly nagy értéket valamely új átalakítás felfedezésének? mert lehetségessé teszi, hogy egyetlen tételből tízet vagy húszat következtessünk, értéke ugyanaz, mint annak a zérusnak, a melyet valamely egész szám jobb végére illesztünk.

Ime, ez határozta meg eddig a mathematikai tudomány mozgásának irányát és bizonyára ez fogja a jövőben is meghatározni. De ép így fontossága van a felmerülő feladatok természetének is. Nem felejthetjük el, hogy milyennek kell lennie czélunknak: szerintem ez a czél kettős; tudományunk egyaránt határos a filozófiával, meg a fizikával és mi e két szomszédunk számára dolgozunk; mindig is azt láttuk és még azt is fogjuk látni, hogy a mathematikusok két ellentétes irányban haladnak.

Egyrészről a mathematikai tudománynak elmélkednie kell önmagáról és ez hasznos, mert önmagáról elmélkednie annyit tesz, mint elmélkedni az emberi értelemről, a mely alkotta, annál inkább, mert alkotásai közül ép ez az, a melyikhez a legkevesebbet kölcsönzött kívülről. Ezért hasznosak bizonyos mathematikai elmélkedések, mint azok, a melyek czélja a postulatumok, a szokatlan geometriák, vagy a különös viselkedésű függvények tanulmányozása. Mennél inkább eltérnek ezek az elmélkedések a legközönségesebb fogalmaktól és következéskép a természettől meg az alkalmazásoktól, annál jobban meg fogják mutatni, hogy mire képes az emberi elme, mikor mindinkább felszabadul a külső világ zsarnoksága alól és ennek folytán annál jobban megismertetik a maga valóságában.

De az ellenkező oldalról, a természet oldaláról kell a hadseregünk főrészét irányító vezérlésnek kiindulnia.

Itt találjuk a fizikust vagy a mérnököt, a ki így szól hozzánk: «Tudja ön ezt a differencziál-egyenletet integrálni? Szükségem volna rá egy hét mulva ilyen meg ilyen szerkesztés czéljából, a melyet ekkorra meg ekkorra be kell fejeznem.» «Ez az egyenlet — válaszoljuk mi — nem tartozik az integrálható egyenletek egyik osztályába sem, hiszen tudja hogy nem sok ilyen van.» «Igen, tudom, de akkor mire való ön?» A legtöbb esetben elég volna megegyezni; a mérnöknek valójában nincs szüksége az integrálra végleges kifejezésében; csak az integrál-függvény általános menetét kell ismernie, vagy egyszerűen egy bizonyos számot akar, a melyet könnyen megkapnánk ebből az integrálból, ha ismernők. Rendesen nem ismerjük, de azt a számot e nélkül is ki tudnók számítani, ha tudnók pontosan, mely számra van a mérnöknek szüksége és mily pontossággal.

Régente csak akkor tekintettek valamely egyenletet megoldottnak, a mikor a megoldást véges számú ismert függvénynyel ki tudták fejezni; de ez száz eset közül egyben is alig lehetséges. A mit mindig meg tudunk tenni, vagy inkább a mit mindig törekednünk kell megtenni, az csak annyi, hogy a feladatot — hogy úgy mondjam — *qualitative* megoldjuk, azaz igyekszünk felismerni az ismeretlen függvényt ábrázoló görbe általános alakját.

Még hátra van azután a feladat *quantitativ* megoldása; de ha az ismeretlent nem lehet véges számítással meghatározni, mindig lehet összetartó végtelen sorral ábrázolni, a melynek alapján ki tudjuk számítani. Lehet-e ezt igazi megoldásnak tekintenünk? Azt beszélik, hogy NEWTON körülbelül a következő anagrammát közölte LEIBNITZ-czal: *aaaaabbbeeeeii,* stb. LEIBNITZ természetesen az egészből nem értett semmit; de mi ismerve a nyitját, tudjuk, hogy ez az anagramma modern nyelvre fordítva annyit jelent: «Tudok minden differencziálegyenletet integrálni» és kénytelenek vagyunk azt mondani, hogy NEWTON-nak igen nagy volt a szerencséje, vagy különös módon csalódott. Azt akarta egész egyszerűen mondani, hogy (a határozatlan együtthatók módszerével) tud olyan hatványsort alakítani, a mely a kitűzött egyenletnek formálisan eleget tesz.

Hasonló megoldás ma már nem elégitene ki bennünket és pedig két okból; mivel az összetartás nagyon lassú és mivel a tagok egymásután következésében nincs törvényszerűség. Ellenben a $\Theta$ sor, úgy látszik, minden igényt kielégít, először mivel nagyon gyors az összetartása (ez a gyakorlat emberének az érdeke, a ki a lehető leggyorsabban hozzá akar jutni a számjához) és azután azért is, mert egy pillantással észreveszszük a tagok törvényszerűségét (az elméleti ember esztétikai igényeinek kielégítésére).

De akkor már nincsenek megoldott és megoldatlan feladatok; csak *többé vagy kevésbé* megoldott problémák vannak a szerint, a mint a megoldást képviselő sor többé-kevésbé gyors összetartású, vagy többé-kevésbé harmonikus törvényszerűség nyilatkozik meg benne. Mindazonáltal előfordulhat, hogy valamely tökéletlen megoldás mutatja meg a jobb megoldásra vezető utat. Néha a sor összetartása oly lassú, hogy a számítást nem lehet elvégezni és mindössze csak annyit értünk el vele, hogy a probléma lehetőségét bebizonyítottuk.

És akkor a mérnök ezt nevetségesnek találja és igaza van, mert ez nem segíti abban, hogy tervezetét a meghatározott időre elkészítse. Az kevéssé érdekli, hogy hasznára lesz-e ez a XXII. század mérnökeinek; mi másként gondolkozunk és mi gyakran szerencsésebbek vagyunk abban, hogy unokáinkat megkiméljük egy napi munkától, mint hogy kortársainkkal egy órai munkát megtakaríttassunk.

Néha tapogatózás, kisérletezés közben elég összetartó képletre találunk. Mit akarnak még, mondja a mérnök? és mi mindamellett nem vagyunk elégedettek; mi szerettük volna *előrelátni* ezt az összetartást. Miért? mert ha egyszer előre tudtuk volna látni, akkor máskor is előreláthatnók. Sikerült eredményt elérnünk, de ez kevés a mi szemünkben, ha nincs komoly reményünk, hogy ezt máskor is megtehetjük.

A mily mértékben fejlődik a tudomány, mind nehezebb lesz teljes egészében áttekinteni; akkor megpróbáljuk darabokra szelni, hogy e darabok egyikével megelégedjünk: szóval speczializálódunk. Ha ebben az értelemben haladnánk tovább, ez kellemetlen akadálya volna a tudomány haladásának. Már mondtuk, hogy haladása különböző részeinek váratlan kapcsolatba jutása folytán létesülhet. A túlságos speczializálódás azt jelentené, hogy ezek a kapcsolatok lehetetlenekké válnak. Reméljük, hogy ilyen kongresszusok, mint ez a mostani, avval, hogy érintkezésbe hoznak egymással, kilátásokat nyitnak számunkra a szomszédos területre, köteleznek, hogy összehasonlítsuk a mienkkel, hogy kimozduljunk a mi kis falunkból és így a legjobb orvoslást fogják nyújtani az imént jelzett veszedelem ellen.

De nagyon sokáig tartózkodtam az általánosságok körében, ideje, hogy a részletekre térjek.

Tekintsük át azokat a különböző részlettudományokat, a melyek összessége a mathematika; lássuk, hogy mit tett mindegyikük, hova törekszik és mit várhatunk tőle. Ha az előző szempontok helyesek, azt kell látnunk, hogy a mult nagy haladásai akkor álltak be, a mikor két ily tudomány közeledett egymáshoz, a mikor tudatára jutottak alakbeli hasonlatosságuknak, anyaguk különbözősége daczára, midőn egymás mintájára alakultak, úgyhogy mindegyikük felhasználhassa a másik eredményeit. Ugyanígy hasonló természetű közeledésektől kell várnunk a haladást a jövőben.

## Az arithmetika.

Az arithmetika haladásai lassúbbak voltak, mint az algebráéi és az analiziséi és könnyen megérthetjük, hogy miért. A folytonosság érzése értékes vezető, a melyben nincs része az arithmetikával foglalkozónak; minden egész szám külön áll a többitől és, hogy úgy mondjuk, egyéni életet él; mindegyikük bizonyos tekintetben kivétel és ezért ritkábbak az általános tételek a számelméletben, ezért van az, hogy a meglevők is homályosabbak és hosszabb időn át kikerülik a kutatók figyelmét.

Ha az arithmetika hátrányban van az algebrával és analizissel szemben, legjobban teszi, ha igyekszik ezekről a tudományokról példát venni, hogy hasznára fordítsa azoknak az előnyét. Az arithmetikusnak tehát az algebrával fennálló hasonlóságokat kell útmutatókul tekintenie. Számos ilyen hasonlóság van és ha sok esetben nem is tanulmányozták még ezeket elég alaposan ahhoz, hogy fel lehessen őket használni, legalább régóta sejtik és a két tudomány azonos nyelve azt mutatja, hogy észre-vették őket. Így van az, hogy beszélnek transcendens számokról és úgy adnak számot róluk, hogy e számok jövendő osztályozásának a mintaképe már most is a transcendens függvények osztályozása, azonban még nem látják jól, hogyan lehet majd egyik osztályozásról a másikra áttérni; de ha ezt meglátták volna, akkor már meg is volna és nem lenne a jövő munkája.

Az első eszembe ötlő példa a kongruencziák elmélete, a melyben tökéletes párhuzamosságot találunk az algebrai egyenletek elméletével. Bizonyára lesz idő, a mikor teljessé teszik azt a párhuzamosságot, a melynek pl. az algebrai görbék és a kétváltozós kongruencziák elmélete között fenn kell állania. És a mikor a többváltozós kongruencziákra vonatkozó feladatok meg lesznek oldva, ez lesz az első lépés a határozatlan analizis sok kérdésének megoldásához.

Másik példát ad a számtestek és ideálok elmélete, a hol azonban a hasonlóságot csak utólag vették észre. Ennek ellentéte gyanánt vizsgáljuk a valamely felületen vont görbéket; a létező számoknak a teljes metszések fognak megfelelni, az ideáloknak a nem tökéletes metszések, a törzsideáloknak a szétbonthatatlan görbék; az ideálok különböző osztályainak is megvannak a maguk analogonjaik.

Nem lehet kétség a fölött, hogy ez a hasonlóság világossá tudja tenni az ideálok-, vagy a felületek elméletét, vagy talán mindkettőt egyszerre.

Az alakok és különösen a quadratikus alakok elmélete benső kapcsolatban van az ideálokéval. Ha az arithmetikai elméletek közt ez az elsők között volt, a melyek kialakultak, ez akkor történt, a mikor odáig jutottak, hogy a lineáris átalakítások csoportjainak vizsgálatával egységessé tették.

Ezek az átalakítások lehetővé tették az osztályozást és következésképa rendezést is. Talán ennek már minden gyümölcsét leszedték, a mit remélni lehetett; de ha ezek a lineáris átalakítások geometriai perspektivák szülői, az analitikus geometria sok más átalakítást szolgáltat (mint például valamely algebrai görbe biraczionális átalakításait), a melyek arithmetikai analogonjait keresni előnyös lesz. Ezek kétségtelenül nem folytonos csoportokat fognak alkotni, a melyeknek először az alaptartományát kell vizsgálni, mert ez lesz mindennek a kulcsa. Ebben a vizsgálatban nem hiszem, hogy Minkowski *Geometrie der Zahlen*-jának jó hasznát ne lehetne venni.

A folytonos változóknak a számelméletbe való bevezetése Hermite-nek olyan gondolata, a melyből még nem szedték ki mindazt, a mit tartalmaz. Most tudjuk, hogy mi a jelentősége. Vegyünk kiindulási pontul két alakot, $F$-et és $F'$-t, a melyek közül a második meghatározott quadratikus alak és alkalmazzuk rájuk ugyanazt az átalakítást; ha az $F'$ alak az átalakítás után redukált, akkor azt mondjuk, hogy az átalakítás redukált, továbbá, hogy az $F$ alak az átalakítás után redukált. Ebből következik, hogy ha az $F$ alak önmagában átalakítható, több redukáltja lehet; de ez a kellemetlenség lényeges és semmilyen kerülő úton elejét nem vehetjük; másrészt nem gátolja meg, hogy ezek a redukáltak ne engedjék meg az alakok osztályozását. Világos, hogy ezt az eddigelé csak alakokra és nagyon különleges átalakításokra alkalmazott gondolatot ki lehet terjeszteni nem lineáris átalakítási csoportokra is, jelentősége sokkal nagyobb és még nem merült ki.

A törzsszámok elmélete oly része az arithmetikának, a hol látszólag teljesen hiányzik az egység; csak asymptotikus törvényeket találtak és nem remélhetünk másféléket; de ezek a tömegek elszigeteltek és csak külömböző utakon lehet hozzájuk jutni, a melyek — úgylátszik — nem közlekedhetnek egymással. Azt hiszem, hogy én látom, honnan fog kiindulni az óhajtott egység, de csak nagyon határozatlanul látom; kétségkívül minden vissza fog vezetődni a transcendens függvények egy osztályának a tanulmányozására, a melyek szinguláris helyeinek vizsgálata és DARBOUX módszerének alkalmazása folytán lehetséges lesz igen nagy számok bizonyos függvényeit asymptotikusan kiszámítanunk.

## Az algebra.

Az algebrai egyenletek elmélete még sokáig igénybe fogja venni a mathematikusok figyelmét; számos és különböző oldalról lehet ezt a tanulmányt elkezdeni; a legfontosabb bizonyára a csoportelmélet, a melyre vissza fogunk térni. De ott van a gyökök számértékének meghatározása és a valós gyökök számának eldöntése is. LAGUERRE kimutatta, hogy STURM nem mondott meg mindent erre a pontra vonatkozólag. Oly invariánsok rendszerének a tanulmányozásáról van szó, a melyek nem változtatják előjelüket, ha a valós gyökök száma ugyanaz marad. Alkothatunk oly függvényeket ábrázoló sorokat is, a melyek szinguláris pontjai valamely algebrai egyenlet különböző gyökei (pl. olyan racziónális tört függvényeket, a melyek nevezője ennek az egyenletnek a bal oldala); a magasfokú tagok együtthatói adják kisebb vagy nagyobb megközelítéssel a gyökök egyikét; olyan számvetési eljárás csírája van ebben, a melyet rendszeres tanulmány tárgyává lehet tenni.

Négy évtizeddel ezelőtt úgy látszott, hogy az algebrai alakok invariánsainak elmélete magába olvasztja az egész algebrát; ma már ez a tudományág elhagyatott állapotban van; azonban nem az anyag merült ki; csak ki kell terjeszteni, úgy, hogy ne szorítkozzunk többé pl. a lineáris alakításokra vonatkozó invariánsokra, hanem vizsgáljuk azokat is, a melyek tetszőleges csoportra vonatkoznak. A régen szerzett tételek így más, általánosabb tételeket fognak sugalmazni, a melyek körülöttük csoportosulnak épúgy, mint a hogy valamely kristály növekszik a megfelelő oldatban. És a mi Gordan-nak azt a tételét illeti, hogy a különböző invariánsok száma véges, a melynek a bizonyítását Hilbert oly szerencsésen egyszerűsítette, nekem úgy tetszik, hogy sokkal általánosabb kérdés feltevésére vezet bennünket: ha adva van az egész polynomok végtelen sokasága, a mely ezen sokaság véges számu tagjától függ algebrailag, le lehet-e vezetni ezeket mindig véges számú tagból? Nem kell azt hinnünk, hogy az algebra végleg be van fejezve, mivel szabályokat ad az összes lehető kapcsolatok alakítására; hátra van még, hogy érdekes kapcsolatokat keressünk, olyanokat, a melyek bizonyos feltételeknek felelnek meg. Így a határozatlan analízis bizonyos faja fog keletkezni, a melyben az ismeretlenek már nem lesznek egész számok, hanem raczionális egész függvények. Ez alkalommal tehát az algebra veszi mintául az arithmetikát, a mennyiben az egész számnak akár a tetszőleges együtthatós egész polynommal, akár az egész számú együtthatós egész polynommal való hasonlóságát fogadja el irányítónak.

## A differencziálegyenletek.

Már sokat tettek a lineáris differencziálegyenletekre vonatkozólag és csak az van hátra, hogy tökéletesítsük, a mit eddig megkezdtek. A nem lineáris differencziálegyenleteket illetőleg azonban sokkal hátrább vagyunk Régóta elveszett számunkra az a remény, hogy ismert függvények segítségével lehessen integrálni; tehát az ezen differencziálegyenletekkel értelmezett függvényeket magukért kell vizsgálnunk és mindenekelőtt e függvények rendszeres osztályozására kell törekednünk; kétségkívül a singularis helyek szomszédságában való növekedés módjának vizsgálata fogja ezen osztályozás első elemeit szolgáltatni, de mi csak akkor leszünk megelégedve, ha megtalálták az átalakítások bizonyos csoportját (például Cremona átalakításai), a mely ugyanazon szerepet fogja játszani a differencziálegyenlettel szemben, mint a biraczionális átalakítások csoportja az algebrai görbékre nézve. Akkor ugyanazon osztályba sorozhatjuk majd ugyanazon egyenlet valamennyi transzformáltját. Vezetőnk egy már kész elmélettel való hasonlóság lesz, t. i. a biraczionális átalakításokra és valamely algebrai görbe nemére vonatkozó elmélet.

Magunk elé tűzhetjük, hogy e függvények vizsgálatát visszavezessük az egyértékű függvényekére és pedig kétféleképp: tudjuk, hogy ha $y=f(x)$, bármilyen is az $f(x)$ függvény, $y$-t és $x$-et ki lehet fejezni valamely $t$ segédváltozó egyértékű függvényeivel; de ha $f(x)$ valamely differencziálegyenlet megoldása, milyen esetben tesznek eleget ezek a kisegítő egyértékű függvények maguk differencziálegyenleteknek? Nem tudjuk; ép úgy nem tudjuk, hogy milyen esetben fejezhető ki az általános integrál $F(x, y) =$ tetszőleges állandó alakban, a hol $F(x, y)$ egyértékű.

Súlyt helyezek a valamely differencziálegyenlettel értelmezett görbék qualitativ vizsgálatára. A legegyszerűbb esetben, a mikor az egyenlet elsőrendű és elsőfokú, ez a vizsgálat a határcyklusok számának meghatározására vezetődik vissza. Nagyon finom vizsgálat ez, a melyet megkönnyíthet valamely algebrai egyenlet valós gyökei számának kereséséhez való hasonlatossága; a mikor valamely tény képes lesz e hasonlatosság természetét megvilágítani, előre bizonyosak lehetünk, hogy termékeny lesz.

## A parcziális differencziálegyenletek.

A parcziális differencziálegyenletekre vonatkozó ismereteink újabban lényeges lépéssel haladtak előre Fredholm felfedezései következtében. De ha közelről kutatjuk ezeknek az eredményeknek a lényegét, akkor azt látjuk, hogy ennek a nehéz elméletnek egy más, sokkal egyszerűbb feladat, t. i. a determinánsok és az elsőfokú egyenletek problémája, mintájára való alakításáról van szó. Az elméleti fizika problémáinak nagy részében az integrálandó egyenletek lineárisak; ezek többváltozós ismeretlen függvények értelmezésére szolgálnak és az értelmezett függvények folytonosak. Miért? Mert a mikor az egyenleteket felírtuk, az anyagot folytonosnak tekintettük. De az anyag nem folytonos, hanem atomokból van összetéve és ha úgy írtuk volna fel az egyenleteket, mint azt olyan megfigyelő tette volna, a kinek a szeme elég éles ahhoz, hogy meglássa az atomokat, nem kaptunk volna bizonyos ismeretlen *függvények* meghatározására alkalmas kevésszámú *differencziálegyenletet*, hanem sok ismeretlen *állandó* meghatározására használható nagyszámú *algebrai* egyenletet. És ezek az algebrai egyenletek elsőfokúak lettek volna, úgy, hogy — végtelen türelemmel — közvetlenül alkalmazhattuk volna rájuk a determinánsok módszerét.

Minthogy azonban életünk rövidsége nem enged meg olyan fényűzést, mint a végtelen türelem, másképen kell eljárnunk, át kell térnünk a határra, úgy hogy az anyagot folytonosnak tekintjük. Két mód van az elsőfokú egyenletek elméletének határátmenet útján történő átalakítására. Vizsgálhatjuk a különálló egyenletek végtelen sokaságát, a melyekben a hasonlóan különálló ismeretlenek száma végtelen. Ezt tette pl. Hill a holdelméletben. Akkor végtelen rendű determinánsokkal van dolgunk, a melyek úgy viszonylanak a közönséges determinánsokhoz, mint a sorok a véges összegekhez.

Felvehetünk azonban oly parcziális differencziálegyenletet is, a mely, hogy úgy mondjuk, ez egyenletek folytonos, végtelen sokaságát képviseli és ezt felhasználhatjuk oly ismeretlen függvény meghatározására, a mely az ismeretlenek folytonos, végtelen sokaságát képviseli. Ekkor más végtelenrendű determinánsokat kapunk, a melyek úgy viszonylanak a közönséges determinánsokhoz, mint az integrálok a véges összegekhez. Ezt tette FREDHOLM; sikere másrészt a következő tényből ered: ha valamely determinánsban a főátlóban levő elemek 1-gyel egyenlők és a többi elemeket elsőrendű homogén kifejezéseknek tekintjük, úgy rendezhetjük a determináns kifejtett alakját, hogy egy csoportban egyesítjük az ugyanazon rendű homogén tagokat. FREDHOLM végtelen determinánsára lehetett a rendezésnek ezt a módját alkalmazni és az eredmény az volt, hogy ilyen módon összetartó sort kapunk.

Bizonyára ez a hasonlatosság vezette FREDHOLM-ot, de evvel megkaptunk-e már mindent, a mit meg kell belőle kapnunk? Bizonyára nem; ha a sikert az egyenletek lineáris alakjának köszönhetjük, ugyanily természetű gondolatmenetet kell tudnunk alkalmazni valamennyi, lineáris alakú egyenletre vonatkozó problémában, sőt a közönséges differencziálegyenletekre vonatkozókban is, mivel ezeknek az integrálását mindig vissza lehet vezetni valamely *lineáris* elsőrendű parcziális differencziálegyenletére.

Nemrégiben hozzáfogtak a DIRICHLET féle problémának és a vele összefüggő más problémáknak más eszközökkel való megoldásához, úgy hogy DIRICHLET eredeti gondolatára visszatérve valamely határozott integrál minimumát keresik, de ez alkalommal szigorú eljárások útján. Kétségtelennek tartom, hogy nagy nehézség nélkül sikerülni fog a két módszert közelebb hoznunk egymáshoz, kölcsönös viszonyukról számot adni magunknak és ép oly kevéssé kételkedem abban, hogy ebből úgy az egyiknek, mint a másiknak sokat kell nyernie. HILBERT kettős kezdeményezése folytán már ezen az úton haladunk.

## Az Abel-féle függvények.

Tudjuk, hogy az ABEL féle függvényekre vonatkozólag mely főkérdés megoldása van még hátra. Valamely algebrai görbére vonatkozó integrálokból eredő ABEL féle függvények nem a legáltalánosabbak; ezek csak egy különleges esetet jelentenek és azért speciális ABEL-féle függvényeknek lehet őket nevezni. Milyen kapcsolatban vannak ezek az általános függvényekkel és hogyan lehet ez utóbbiakat osztályozni? Még nemrég a megoldás nagyon messzefekvőnek tetszett. Ma már a problémát virtuálisan megoldottnak tekintem, a mióta CASTELNUOVO és ENRIQUES közölték a kettőnél több méretű pontsokaságok totális differencziáljainak integráljaira vonatkozó legújabb értekezésüket. Most már tudjuk, hogy vannak görbével kapcsolatos ABEL-féle függvények és felülettel kapcsolatosak és hogy sohase lesz szükséges kettőnél több méretű sokaságokhoz emelkednünk. Ha ezt a tényt kapcsolatba hozzuk WIRTINGER dolgozatainak következményeivel, kétségtelenül végére jutunk minden nehézségnek.

## Függvénytan.

Főként a két- és többváltozós függvényekről akarok beszélni. Az egyetlen változós függvényekkel való hasonlatosságuk értékes vezető, de nem elegendő; a kétféle függvények között lényeges különbség van és valahányszor csak úgy akarunk általánosítani, hogy egyikről a másikra áttérünk, váratlan akadályra bukkanunk, a melyet sikerült néha különleges fogásokkal legyőzni, de a mely gyakran máig is ledönthetetlen maradt. Gondosan fel kell tehát kutatnunk azokat a tényeket, a melyek olyan természetüek, hogy világosságot deríthetnek ennek az egyváltozós és a többváltozós függvények közt fennálló különbségnek a lényegére. Először is közelről meg kell vizsgálnunk azokat a fogásokat, a melyek eredményre vezettek bizonyos különleges esetekben, hogy lássuk, mi lehet ezeknek közös vonása. Miért lehetetlen igen gyakran valamely négyméretű térben a konformis leképezés és mit kell a helyére tennünk? Nem négyváltozós harmonikus függvények lesznek-e az egyváltozós függvények igazi általánosítása, a melyek valós részei csak különleges esetei a kétváltozós függvényeknek? A többváltozós transcendens függvények vizsgálatánál lehet-e valami hasznunk abból, a mit az algebrai vagy raczionális függvényekről tudunk, vagy más szóval, mily értelemben mondhatjuk, hogy a kétváltozós transcendens függvények úgy viszonylanak az egyváltozós transcendens függvényekhez, mint a kétváltozós raczionális függvények az egyváltozós raczionális függvényekhez?

Igaz-e, hogy ha $z=f(x, y)$, bármilyen függvény is $f$, az $x$, $y$ és $z$ egyszerre kifejezhető két segédváltozó egyértékű függvényeiben, vagy, hogy oly kifejezést használjunk, a melyet a használat kezd szentesíteni, lehet e a kétváltozós függvényeket úgy *uniformizálni*, a hogy az egyváltozós függvényeket informizáljuk? Megelégszem a kérdés felvetésével, melynek a megoldását talán a közel jövő meghozza számunkra.

## Csoportelmélet.

A csoportelmélet nagy terjedelmű tárgy, a melyről sokat lehetne mondani.

Nagyon sokféle csoportok vannak és bármily osztályozást fogadunk is el, mindig találunk újakat, a melyek nem illenek belé. Korlátot fogok magamnak szabni és csak LIE folytonos csoportjairól és GALOIS nem-folytonos csoportjairól fogok itt beszélni, a melyek egyikét ép úgy, mint a másikát végesrendű csoportoknak szokás nevezni, bár ennek az elnevezésnek nincs az egyikre teljesen ugyanaz a jelentése, mint a másikra nézve. A LIE-féle csoportok elméletének különös vezetője van; valamely véges átalakítás végtelen sok infinitezimális átalakítás összekapcsolásának eredménye. Legegyszerűbb az az eset, a mikor ezek az infinitezimális átalakítások visszamennek az $1+\varepsilon$-nal való egyszerű szorzásra, a hol $\varepsilon$ nagyon kicsi. Ezeknek az átalakításoknak az ismétléséből származik akkor az exponentiális függvény; így jutott rá NEPER. Tudjuk, hogy az exponentiális függvényt nagyon egyszerű és nagyon összetartó sorral lehet ábrázolni és a hasonlatosság azután megmutatja, hogy mely utat kell követnünk. Ezt a hasonlatosságot másrészt különleges jelekkel lehet kifejezni, a melyre szives engedelmükkel nem fogok most kiterjeszkedni. Már nagyon előre jutottunk LIE, KILLING és CARTAN munkássága folytán; már csak a bizonyítások egyszerűsítése, továbbá az eredmények kapcsolatba hozása és osztályozása van hátra.

A GALOIS-féle csoportok vizsgálata sokkal hátrább maradt; és ezt meg lehet magyarázni; ez ugyanazon okból történt, a miért az analizis előbbre jutott, mint az arithmetika, mert a folytonosság nagy könnyebbségeket okozott, a melyeket ki tudtak használni a kutatók. De szerencsére a két elmélet között határozott párhuzamosság van és arra kell törekednünk, hogy ezt mindinkább érvényre juttassuk. A hasonlóság teljesen ugyanaz, mint a melyet az arithmetika és algebra között láttunk és ugyanúgy hasznunkra is fordíthatjuk.

## A geometria.

Ugylátszik, hogy a geometria nem tartalmazhat semmit, a mi nem lenne már meg az algebrában vagy az analizisben; hogy a geometria tényei nem mások, mint az algebrai vagy analizisbeli tényeknek más nyelven való kifejezései. Azt lehetne tehát hinnünk, hogy a most végzett szemle után semmi mondanivalónk nem marad, a mi külön a geometriára vonatkoznék. Ez azt jelentené, hogy félreismerjük még egy jól szerkesztett nyelvnek a jelentőségét is, hogy nem értjük, mit csatol a dolgokhoz magukhoz e dolgok kifejezésének és ebből következő csoportosításának módja.

Először is a geometriai meggondolások új problémák kitűzésére vezetnek bennünket; ezek ugyan, ha úgy akarjuk, analitikai problémák, de ezeknek a felállítására az analizis maga sohasem nyujtott volna alkalmat. De az analizisnek haszna van belőlük ép úgy, mint a hogy haszna van azokból, a melyeket a fizika szükségleteinek a kielégítése czéljából kell megoldania.

Határozottan nagy előnye a geometriának, hogy az érzékek segítségére lehetnek az értelemnek és támogatják a követendő út megkeresésében, ezért sokan szeretik az analizis problémáit geometriai alakra hozni. Sajnos, érzékeink nem tudnak valami messzire vezetni bennünket és cserbenhagynak, mihelyt túl akarunk menni a klasszikus három méreten. Azt jelenti ez, hogy ezen a szűk területen túl, a melyre a végzet látszólag vissza akar bennünket szorítani, csak a tiszta analizisre számíthatunk és hogy minden háromnál több méretű geometria hiábavaló és tárgytalan? A megelőző nemzedékben a legnagyobb tudósok erre «igen»-nel felettek volnak; ma már annyira megbarátkoztunk evvel a fogalommal, hogy nem keltünk nagy csodálkozást, még ha egyetemi előadásban beszélünk is róla.

De mire lehet használni? Könnyű ezt meglátni: először is nagyon kényelmes nyelvet szolgáltat, a mely nagyon röviden fejezi ki azt, a mit az analizis rendes nyelve terjedelmes mondatokban adna elő. Továbbá ez a nyelv ugyanazon néven nevezi a hasonló dolgokat és megállapítja a hasonlóságokat, úgy hogy meg se felejtkezhetünk róluk. Tehát még lehetővé teszi számunkra az eligazodást is ebben a térben, a mely túlságosan nagy nekünk és a melyet nem láthatunk, úgy hogy szakadatlanul emlékezetünkbe idézi a látható teret, a mely ennek kétségkívül csak tökéletlen képe, de mégis csak képe. Itt megint, ép úgy, mint az összes előző példákban, az egyszerűvel való hasonlatossága érteti meg velünk a bonyolult dolgot.

Ez a háromnál több méretű geometria nem egyszerű elemző mértan, nem tisztán quantitativ, hanem qualitativ is és főleg ez teszi érdekessé. Az *Analysis Situs* fontossága rendkívüli és ezt nem tudom elég nyomatékkal említeni; elég volna ennek a bizonyítására az, hogy milyen hasznot húzott belőle Riemann, legkiválóbb megteremtőinek egyike. Kell, hogy ezt tökéletesen meg lehessen majd szerkeszteni a magasabbrendű terekben; oly eszközünk lesz akkor, a melylyel valósággal a térfölötti dolgokba láthatunk és a mely helyettesítheti érzékeinket.

Az *Analysis Situs* problémái talán föl se merültek volna, ha csak az analizis nyelvét használják; vagyis inkább csalódom: bizonyára felmerültek volna, mert megoldásukra az analizisben a kérdések egész tömegénél szükség van; de elszigetelten kerültek volna szóba, egymásután és a nélkül, hogy közös kapcsolatukat észre lehetett volna venni.

Főképen az átalakítások és csoportok fogalmának bevezetése okozta a geometria újabb haladásait. Ennek köszönhetjük, hogy a geometria már nem többé-kevésbbé érdekes, egymásután jövő, de egymáshoz nem hasonló tételek gyüjteménye, hanem egységre tett szert. És másrészről a tudományok történetének nem szabad elfelejtenie, hogy ép a geometria adott alkalmat a folytonos átalakítások rendszeres tanulmányozására, úgy hogy a tiszta geometria hozzájárult a maga részéről a csoport fogalmának a fejlődéséhez, a mely annyira hasznos a mathematika többi ágaiban.

Valamely algebrai görbén fekvő pontok csoportjainak Brill és Noether módján való vizsgálata szintén hasznos eredményekre fog vezetni akár közvetlenül, akár más hasonló eseteket véve mintául. Így látjuk kifejlődni a geometriának egy egész fejezetét, a melyben valamely felületen rajzolt görbék szerepe hasonló valamely görbén levő pont-csoportokéhoz. Ezért mától fogva remélhetjük, hogy kezdenek megvilágosodni a felületek elméletére vonatkozó és oly maradandóknak tetsző utolsó miszteriumok.

A geometria tehát óriási mezőn arathat és még figyelmen kívül hagytam az enumerativ geometriát, főleg pedig az infinitezimális geometriát, a melyet Darboux oly sikeresen művel és a melyet oly szépen gazdagított Bianchi.

## A cantorismus.

Beszéltem már arról a szükségletről, hogy minduntalan vissza kell térnünk tudományunk alapelveire és arról a haszonról, a mely ebből az emberi értelemre háramlik. Ez a szükséglet hozott létre két kisérletet, e melyek igen nagy helyet foglaltak el a mathematika legújabb történetében. Első a cantorismus, a mely jól ismert szolgálatokat tett a tudománynak. A cantorismus egyik jellemző vonása, hogy a helyett, hogy mind bonyolultabb szerkesztések felépítésével emelkednék az általánoshoz s szerkesztés útján értelmezve, a *genus supremum*-ból indúl ki és a mint a scholastikusok mondták volna, csak *per genus proximum et differentiam specificam* értelmez. Innen ered az az idegenkedés, a melyet valamikor sokakban felkeltett, pl. Hermite-ben, a kinek kedves gondolata volt a mathematikát a természettudományokhoz hasonlítani. Nagyrészünknél ezek az aggodalmak eloszlottak, de megtörtént, hogy megütköztünk bizonyos paradoxonokon, bizonyos látszólagos ellenmondásokon, a melyek az eleai Zenont és a megarai iskolát örömmel töltötték volna el. Es akkor mindenki keresi a megoldást. En a magam részéről úgy gondolom és e tekintetben nem vagyok egyedül, hogy a legfontosabb mindig csak oly dolgokat bevezetni, a melyeket véges számú szóval teljesen értelmezhetünk. Bármily megoldást fogadunk el, remélhetjük annak az orvosnak az örömét, a kit valamely szép kóreset vizsgálatára szólítottak fel.

## A postulatumok felülvizsgálása.

Másrészről arra törekednek, hogy felsorolják a különböző mathematikai elméletek alapjául szolgáló többé-kevésbé rejtett axiomákat és postulatumokat. HILBERT jutott a legszebb eredményekhez. Eleinte úgy látszik, hogy ez a terület nagyon korlátolt és ha a leltározásnak vége van, nem marad semmi halaszthatatlan tennivaló. De a mikor már mind felsoroltuk, sok mód lesz mindnyájuk osztályozására; a jó könyvtáros mindig talál valami foglalatosságot és minden osztályozás tanulságos lesz a filozófus szemében.

*

Befejezem ezt a szemlét, a melyről nagyon sok okból nem hihetem, hogy teljessé tudnám tenni, mindenekelőtt azért, mert már túlságos hosszasan vettem igénybe figyelmüket. Azt hiszem, ezek a példák eléggé meg fogják mutatni, milyen módon haladtak a mathematikai tudományok a múltban és hogy mily irányban kell haladniok a jövőben.

*Poincaré Henri.*

Fordította: *Kelemen Ignácz.*

# Kérelem.

A Mathematikai és Physikai Lapok f. évi VII. füzetéhez postai befizető lapot mellékeltem. Felkérem a Társulat igen tisztelt tagjait és előfizetőit, hogy a mellékelt befizető lapot előző évi hátralékos, illetőleg most már esedékes 1911. évi tagsági dijaik befizetésére felhasználni sziveskedjenek, annyival is inkább, mert a be nem folyó *hátrálékos* díjakat február hóban póstai megbízás útján fogom bekérni, ami költségtöbbletet okoz. Kérem egyszersmind az igen tisztelt tagokat arra is, hogy minden lakhely, vagy lakásváltoztatásról levelezőlapon értesíteni sziveskedjenek, hogy a füzetek szétküldése körül zavarok ne támadjanak.

Budapesten, 1910. évi december hó 31-én.

*Dr. Lévay Ede, pénztáros.*
VI., Nagy János-utca 37. sz.

*Utalványcím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.*

# Kimutatás

*az 1910. évi december hó 1-től december hó 31-ig befolyt díjakról.*

Tagsági díjat fizettek :

**1907. évre**: Frőhlich Károly 10 kor. Összesen ... ... ... ... K 10.—

**1908. évre**: Dr. Fekete Mihály 6 kor., Frőhlich Károly 10 kor., Dr. Juckel Gyula 10 kor., Nagy Balázs 6 kor., Szavkay Ede 10 kor., Dr. Vörös Cyrill 10 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... K 52.—

**1909. évre**: Bartoniek Géza 10 kor., Dr. Fekete Mihály 6 kor., Frank István 6 kor., Kovács Kandid 6 kor., Steiner Miklós 6 kor., Szuppán Vilmos 10 kor., Vörös Cyrill 10 kor. Összesen ... K 54.—

**1910. évre**: Baló Gyula 6 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bielek Miksa 10 kor., Fehér Sándor 6 kor., Dr. Fekete Mihály 6 kor., Fertig Vilmos 10 kor., Félegyházy Antal 6 kor., Kovács Kandid 6 kor., Prokesch Ignácz 6 kor., Rigó Ferenc 10 kor., Straub Sándor 10 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Tolnai Jenő 10 kor., Dr. Visnya Aladár 10 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... K 112.—

**1911. évre**: Bláthy Ottó Titusz 10 kor., Dr. Bozóky Endre 10 kor., Heuer Ede 10 kor., Dr. Ilosvay Lajos 10 kor., Klúg Lipót 6 kor., Mattyasovszky Kasszián 6 kor., Pallos Béla Kajetán 6 kor., Riegl Sándor 6 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... K 64.—

**1913. évre**: Sinkó József 6 kor. Összesen ... ... ... ... ... K 6.—

Előfizetési díjat fizettek :

**1909. évre**: Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor. Összesen K 10.—

**1910. évre**: Debreczeni áll. főreáliskola 10 kor., Kolozsvári k. r. kalazantinum 10 kor. Összesen ... ... ... ... ... ... ... ... ... K 20.—

**1911. évre**: Békéscsabai áll. felsőbb leányiskola 10 kor., Budapesti ciszt. tanárképző «Bernardinum» 10 kor., Budapesti br. Eötvös-kollégium 10 kor., Jászóvári prépostság könyvtára 10 kor., Marosvásárhelyi r. kath. főgimnázium 10 kor., Szatmárnémetii r. kath. polg. isk. tanítónőképző 10 kor. Összesen ... ... ... ... ... K 60.—

| | *Összesen befolyt:* | Jan. 1-től. |
|---|---|---|
| Hátralékokból ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... | K 126.— | K 1034.— |
| F. és köv. évi tagsági díjakból ... ... ... ... ... ... ... | K 182.— | K 1388.18 |
| Előfizetési díjakból ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... | K 80.— | K 692.— |

Budapesten, 1910. évi december hó 31-én.

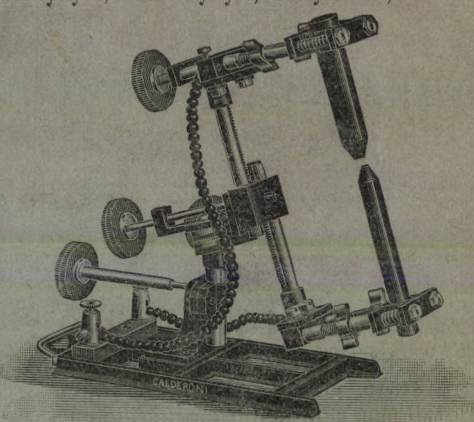
*Dr. Lévay Ede, pénztáros.*
VI., Nagy János-utca 37. sz.

# Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.




**Elektromos ívlámpa** legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—

**Elektromos ívlámpa** egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

**Borszesz-izzófénylámpa** légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

**Háromlábu asztalállvány,** mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110**.—

**Vetitési ernyő** finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

**Ernyő-állvány** fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30**.—

**Vetitési ernyők**·zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

| | 200 | 240 | 300 | 360 | 420 | 480 cm. négyzetben |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ára | **45**.— | **65**.— | **90**.— | **145**.— | **200**.— | **240**.— korona. |

**Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.**

*Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.*

Franklin-Társulat nyomdája